CBS

Colegio Bautista Shalom

Matemática 3
Tercero Básico
Segundo Bimestre

Contenidos

FRACCIONES ALGEBRAÍCAS

- ✓ OPERACIONES CON FRACCIONES ALGEBRAICAS.
- ✓ CÁLCULO MÁXIMO COMÚN DIVISOR Y MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO.
- ✓ APLICACIONES DEL MCD Y DEL MCM.
- ✓ FRACCIÓN ALGEBRAICA.
- ✓ REDUCIR FRACCIONES ALGEBRAICAS A COMÚN DENOMINADOR.
- ✓ SUMA DE FRACCIONES ALGEBRAICAS.
- ✓ MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE FRACCIONES ALGEBRAICAS.
- ✓ DIVISIÓN DE FRACCIONES ALGEBRAICAS.

RECTAS Y ECUACIONES LINEALES

- ✓ ECUACIÓN DE LA RECTA.
- ✓ ECUACIÓN PRINCIPAL DE LA RECTA.
- ✓ FORMA SIMPLIFICADA DE LA ECUACIÓN DE LA RECTA.

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

- ✓ SOLUCIÓN DE ECUACIONES CUADRÁTICAS.
- ✓ SOLUCIÓN POR FACTORIZACIÓN.
- ✓ SOLUCIÓN POR COMPLETACIÓN DE CUADRADOS.
- ✓ SOLUCIÓN POR LA FÓRMULA GENERAL.
- ✓ TRINOMIO CUADRADO PERFECTO.
- ✓ ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO INCOMPLETA.
- ✓ ECUACIONES BICUADRADAS.

SISTEMAS DE ECUACIONES

- ✓ CRITERIOS DE EQUIVALENCIA.
- ✓ COMPATIBILIDAD DEL SISTEMA.
    - ▪ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO.
    - ▪ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO.
    - ▪ SISTEMA INCOMPATIBLE.
- ✓ MÉTODO DE SUSTITUCIÓN.
- ✓ MÉTODO DE IGUALACIÓN.
- ✓ MÉTODO POR REDUCCIÓN.

NOTA: conforme avances en tu aprendizaje debes realizar cada uno de los ejercicios. Copia y resuelve cada ejercicio en hojas bond (blancas) a lápiz y escribe las respuestas con lapicero negro. Sigue las instrucciones de tu catedrático(a).

FRACCIONES ALGEBRAÍCAS

OPERACIONES CON FRACCIONES ALGEBRAICAS

CÁLCULO MÁXIMO COMÚN DIVISOR Y MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

Debemos tener los polinomios factorizados, si no los tenemos lo primero que debemos hacer es descomposición factorial.

Cálculo del máximo común divisor $\Rightarrow$ mcd
Cogemos los factores comunes (están en los dos polinomios) de menor exponente.

Cálculo del mínimo común múltiplo $\Rightarrow$ mcm
Cogemos los factores comunes de mayor exponente y los no comunes.

Observa el siguiente procedimiento…

mcm : Los factores comunes de mayor exponente son $(x-1)^3$ y $(x+2)^2$ y el no común $(x-3)$.

El mcm de $P_{(x)}$ y $Q_{(x)} = (x-1)^3\,(x+2)^2\,(x-3)$.

1. **Hallar el mcd y el mcm de los polinomios :**

$$P_{(x)} = (x-1)^3\,(x+2) \quad y \quad Q_{(x)} = (x-1)^2\,(x+2)^2\,(x-3)$$

mcd : Los factores comunes son $(x-1)$ y $(x+2)$ como debemos coger los de menor exponente.

El mcd de $P_{(x)}$ y $Q_{(x)} = (x-1)^2 \cdot (x+2)$

2. **Descomponer en factores y calcular el mcd y el mcm de los polinomios :**

$$P_{(x)} = x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 11x - 6 \quad y \quad Q_{(x)} = 3x^3 - 12x^2 + 3x - 18$$

$$P_{(x)} = x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 11x - 6 = (x+1)^2\,(x-2)(x+3)$$

$$Q_{(x)} = 3x^3 - 12x^2 + 3x - 18 = 3\cdot(x-2)(x+1)(x-3)$$

$$\text{mcd}\,(P_{(x)}, Q_{(x)}) = (x-2)(x+1)$$

$$\text{mcm}\,(P_{(x)}, Q_{(x)}) = 3\cdot(x+1)^2\,(x-2)(x+3)(x-3)$$

APLICACIONES DEL MCD Y DEL MCM

MCM: lo vamos a utilizar para realizar operaciones con fracciones algebraicas, suma y resta.

Si las fracciones tienen distinto denominador las debemos reducir a común denominador y para ello debemos calcular el mcm de los denominadores.

MCD: lo utilizaremos para simplificar fracciones algebraicas.

FRACCIÓN ALGEBRAICA

Cociente de dos polinomios, el denominador debe de no ser igual a cero. $\dfrac{Q_{(x)}}{P_{(x)}} \quad P_{(x)} \neq 0$

Simplificando expresiones algebraicas…

$$\frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}$$

Aplicamos la Regla de Ruffini (esta regla la veremos en la siguiente etapa *4to grado bachillerato, en caso sigas esa carrera),* para descomponer en factores.

Aplicamos la regla de Ruffini para descomponer en factores.

Numerador: $x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x-1)(x+1)(x+2)$

Denominador: $x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = (x-2)(x-2)(x+2)$

$$\frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} = \frac{(x-1)(x+1)\cancel{(x+2)}}{(x-2)(x-2)\cancel{(x+2)}} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-2)(x-2)}$$

REDUCIR FRACCIONES ALGEBRAICAS A COMÚN DENOMINADOR

Se nos presentan las siguientes fracciones algebraicas, las cuales debemos reducir a común denominador:

$$\frac{x-3}{(x+2)^2} \text{ y } \frac{x^2-5x+4}{(x+2)(x-1)}$$

Pasos a seguir:

1. Descomponemos en factores los denominadores, en este ejemplo ya están factorizados.
2. Calculamos el mcm de los denominadores. Cogemos los factores comunes de mayor exponente y los no comunes.
   mcm : $(x+2)^2(x-1)$
3. Escribimos el mcm en el denominador y vamos multiplicando los numeradores por los factores del mcm que no tenga su denominador.
   $$\frac{x-3}{(x+2)^2} = \frac{(x-3)(x-1)}{(x+2)^2(x-1)} = \frac{(x-3)(x-1)}{(x+2)^2(x-1)}$$

Vemos que al denominador le falta el factor (x − 1) para tener el m. c. m. Entonces, multiplicamos el numerador por ese factor.

Hacemos lo mismo con la segunda fracción

$$\frac{x^2-5x+4}{(x+2)(x-1)}$$

Escribimos el m. c. m.

$$(x+2)^2(x-1) = (x+2)(x+2)(x-1)$$

Al denominador le falta (x + 2) para tener el m. c. m.

Lo que haremos, multiplicar el numerador por (x + 2)

Multiplicamos el numerador por (x + 2)

$$\frac{x^2-5x+4}{(x+2)(x-1)} = \frac{(x^2-5x+4)(x+2)}{(x+2)(x+2)(x-1)} = \frac{(x^2-5x+4)(x+2)}{(x+2)^2(x-1)}$$

SUMA DE FRACCIONES ALGEBRAICAS

Se reducen las fracciones a común denominador y después se suman.

Continuamos con el ejemplo anterior, y le sumamos las dos fracciones obtenidas.

$$\frac{x-3}{(x+2)^2} + \frac{x^2-5x+4}{(x+2)(x-1)} = \frac{(x-3)(x-1)}{(x+2)^2(x-1)} + \frac{(x^2-5x+4)(x+2)}{(x+2)^2(x-1)} = \frac{(x^2-4x+3)+(x^3-3x^2-6x+8)}{(x+2)^2(x-1)} = \frac{x^3-2x^2-10x+11}{(x+2)^2(x-1)}$$

En el caso de la resta, procedemos de la misma manera que al sumar. Debemos al final, restar los numeradores.

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE FRACCIONES ALGEBRAICAS

Previo a realizar las operaciones, es importante que verifiquemos si es posible factorizar, para después simplificar.

Producto de los numeradores dividido entre el producto de los denominadores.

Calcular el producto de las fracciones:

$$\frac{3x-4}{x^3-4} \quad y \quad \frac{x^2-5x+1}{x^2-2x-3}$$

En este caso solo podemos factorizar $x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$ no lo escribimos sólo podemos factorizar $x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$ no lo escribimos ya que no podemos simplificar.

Multiplicamos los numeradores y denominadores.

$$\frac{(3x-4)}{(x^3-4)} \cdot \frac{(x^2-5x+1)}{(x^2-2x-3)} = \frac{3x^3-19x^2+23x-4}{x^5-2x^4-3x^3-4x^2+8x+12}$$

DIVISIÓN DE FRACCIONES ALGEBRAICAS

En este caso, debemos descomponer en factores parar simplificar. Multiplicamos la primera por la inversa de la segunda…

Dividir y simplificar las fracciones: $\frac{x^2-4}{x^2-9} : \frac{x^2-7x+10}{x^2-8x+15}$

Factorizamos todo y simplificamos $(x-5)$ de la segunda

$$\frac{x^2-4}{x^2-9} : \frac{x^2-7x+10}{x^2-8x+15} = \frac{(x+2)(x-2)}{(x+3)(x-3)} : \frac{\cancel{(x-5)}(x-2)}{\cancel{(x-5)}(x-3)} =$$

Multiplicamos la primera por la inversa de la segunda y volvemos a simplificar.

$$\frac{(x+2)(x-2)}{(x+3)(x-3)} : \frac{(x-2)}{(x-3)} = \frac{(x+2)(x-2)}{(x+3)(x-3)} \cdot \frac{(x-3)}{(x-2)} =$$

$$\frac{(x+2)\cancel{(x-2)}\cancel{(x-3)}}{(x+3)\cancel{(x-3)}\cancel{(x-2)}} = \frac{(x+2)}{(x-3)}$$

Para hacer este tema hay que saber descomponer en factores muy bien. Manejarnos con las expresiones notables. Sumar, restar, multiplicar y dividir fracciones normales.

EJERCICIO 01: realiza las siguientes simplificaciones y/u operaciones con fracciones algebraicas.

1. $\frac{x^3+x}{x^4-1}$

2. $\frac{m^2-9}{9m-m^3}$

3. $\frac{ax+by}{ax^2+bxy}$

4. $\frac{x^2-9x}{x^3-6x^2+9x}$

5. $\frac{x^4+2x^3-3x^2}{x^4+2x^3+2x^2+10x+15}$

Realiza las siguientes operaciones:

6. $\frac{3}{x-1}+\frac{x}{x+1}+\frac{4}{x^2+1}$

7. $\frac{x-1}{x+2}+\frac{3}{x-2}-\frac{3x+4}{(x+2)^2}-\frac{x+2}{x^2-4}$

8.

9.

$$\frac{x^2-2x+3}{x-2}\cdot\frac{2x+3}{x+5}$$

$$\frac{x+2}{x}:\left(\frac{x-1}{3}\cdot\frac{x}{2x+1}\right)$$

10.

$$\frac{1}{x+1}\left(x-\frac{1}{x}\right)$$

11.

$$\left(x-\frac{4}{x}\right):\left(x+2\right)$$

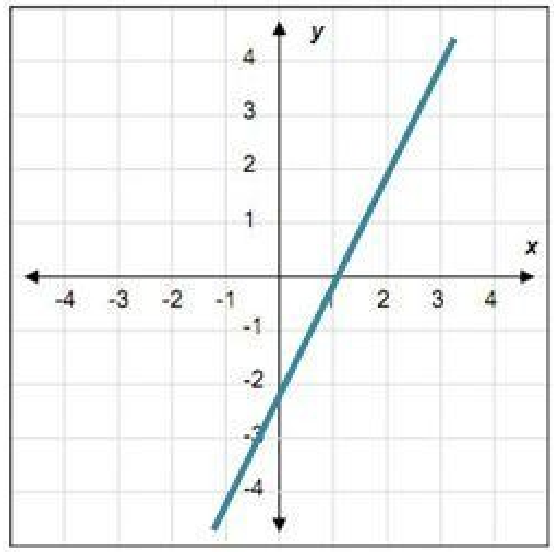
RECTAS Y ECUACIONES LINEALES

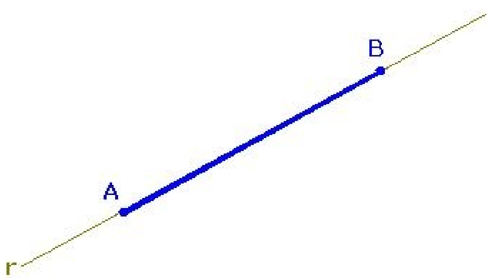
Recordando que la Recta es…

"Un conjunto de puntos colocados unos detrás de otros en la misma dirección"

"Una sucesión ininterrumpida de puntos con una misma dirección; por lo tanto, sólo tiene una dimensión. Dos puntos determinan una recta la recta es infinita, no posee ni principio ni fin"

La recta constituida como un conjunto infinito de puntos alineados en una única dirección. Representada sobre un plano cartesiano, puede ser horizontal, vertical o diagonal (inclinada a la izquierda o a la derecha). Como podrás observar en la imagen de la derecha…





Ahora bien, la línea representada a continuación… la podemos ver, pero a partir de los datos que nos entrega la misma línea (par de coordenadas para "A" y par de coordenadas para "B" en el plano cartesiano) es que podemos encontrar una expresión algebraica (una función) que determine a esa misma recta.

Entonces, el nombre que recibe la "Expresión Algebraica (función)" que determina a una recta dada es Ecuación de la Recta.

Para comprender este proceder es como si la misma línea solo se cambia de ropa para que sepan de su existencia, pero expresada en términos matemáticos (como una ecuación).

La ecuación de la recta varía en su formulación, según los datos con que se conozcan de la línea recta la cual; se pretende representar algebraicamente. En otras palabras, hay varias formas de representar la ecuación de la recta.

ECUACIÓN DE LA RECTA

Esta es una de las formas de representar la ecuación de la recta.

De acuerdo a uno de los postulados de la Geometría Euclidiana, para determinar una línea recta sólo es necesario conocer dos puntos ("A" y "B") de un plano (en un plano cartesiano), con abscisas "x" y ordenadas "y".

Ahora bien, conocidos esos dos puntos, todas las rectas del plano, sin excepción, quedan incluidas en la ecuación.

$$Ax+By+C=0$$

Que también puede escribirse como…

$$ax+by+c=0$$

…y que se conoce como: la **ecuación general** de la línea recta, como lo afirma el siguiente:

Teorema:

La ecuación general de primer grado Ax + By + C = 0, donde A, B, C pertenecen a los números reales (ϵ ℝ), y que "A" y "B" no son simultáneamente nulos, representa una línea recta.

ECUACIÓN PRINCIPAL DE LA RECTA

Esta es otra de las formas de representar la ecuación de la recta.

Pero antes de entrar en la ecuación principal de la recta conviene recordar lo siguiente:

Cada punto **(x, y)** que pertenece a una recta se puede representar en un sistema de coordenadas, siendo *"x"* el valor de la abscisa (horizontal) e *"y"* el valor de la ordenada (vertical).

$$(x, y)=(Abscisa, Ordenada)$$

Por ejemplo:

El punto **(-3, 5)** tiene por abscisa **–3** y por ordenada **5.**

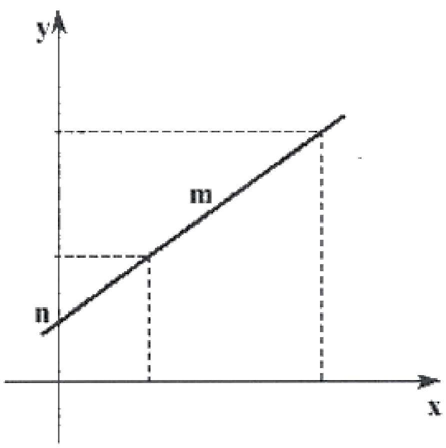
Si un par de valores **(x, y)** pertenece a la recta, se dice que ese punto satisface la ecuación.

El punto (**7, 2**) (el 7 en la **abscisa x** y el 2 en la **ordenada y**) satisface la ecuación **y = x – 5**, ya que al reemplazar queda **2 = 7 – 5** lo que resulta verdadero.

Recordado lo anterior, veamos ahora la ecuación de la recta que pasa solo por un punto conocido y cuya pendiente (de la recta) también se conoce, que se obtiene con la fórmula…

$$y=mx+n$$

...que considera las siguientes variables: un punto (x, y), la pendiente (m) y el punto de intercepción en la ordenada (n), y es conocida como ecuación principal de la recta (conocida también como forma simplificada, como veremos luego).



Al representar la ecuación de la recta en su forma principal vemos que aparecieron dos nuevas variables: la m y la n, esto agrega a nuestra ecuación de la recta dos nuevos elementos que deben considerase al analizar o representar una recta: la pendiente y el punto de intercepción (también llamado intercepto) en el eje de las ordenadas (y)…

FORMA SIMPLIFICADA DE LA ECUACIÓN DE LA RECTA

Si se conoce la pendiente "m", y el punto donde la recta corta al eje de ordenadas es (0, b) (corresponde a "n" en la fórmula principal ya vista), podemos deducir, partiendo de la ecuación de la recta de la forma…

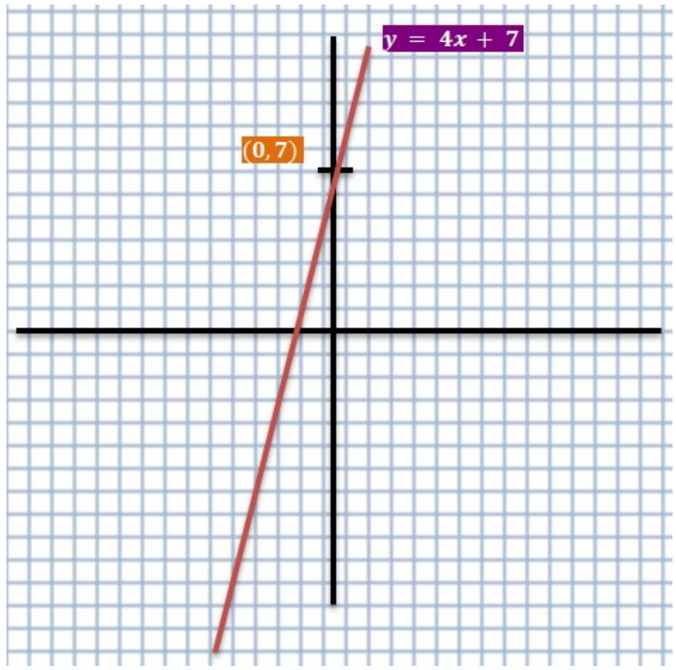
$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-b=m(x-0)$$

$$y-b=mx$$

$$y=mx+b$$

Esta es una segunda forma de la ecuación principal de la recta (se la llama también forma explícita de la ecuación) y se utiliza cuando se conocen la pendiente y la ordenada al origen (o intercepto), que llamaremos "b" (no olvidemos que corresponde a la "n" en la primera forma de la ecuación principal). También, puede ser utilizada esta ecuación para conocer la pendiente y la ordenada al origen a partir de una ecuación dada.



Por ejemplo:

La ecuación **y = 4x + 7** tiene pendiente 4 y coeficiente de posición 7, lo cual indica que interceptará al eje "y" en el punto **(0, 7)**.

Conocida la fórmula de la ecuación principal (simplificada o explícita, como quieran llamarla) de la recta es posible obtener la ecuación de cualquier recta siempre que se nos den al menos dos variables de ella: puede ser la pendiente, puede ser un punto o puede ser el intercepto.

Esto significa que si te dan esa información se puede conseguir una ecuación de la forma *y = mx + b* que cumple con esas condiciones dadas. Nótese que la ecuación *y = mx + b* es la forma generalizada de la forma principal *y = mx + n*; por lo tanto, la "b" corresponde al valor de "n" (el intercepto en la ordenada "y").

EJERCICIO 02: a continuación, se te presentan ecuaciones de primer grado el cual deberás resolver y presentar al catedrático, siempre y cuando dejes constancia de los procedimientos correspondientes.

1. $4x-40=-12+6x-6x$
2. $2(x+1)-3(x-2)=x+6$
3. $\frac{x-1}{4}-\frac{x-5}{36}=\frac{x+5}{9}$
4. $2x=6$
5. $2x-3=6+x$
6. $2(2x-3)=6+x$
7. $\frac{x-1}{6}-\frac{x-3}{2}=1$
8. $\frac{3}{4}(2x+4)=x+19$
9. $\frac{3x+1}{7}-\frac{2-4x}{3}=\frac{-5x-4}{14}+\frac{7x}{6}$
10. $6\left(\frac{x+1}{8}-\frac{2x-3}{16}\right)=3\left(\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}\right)-\frac{3}{8}(3x-2)$

EJERCICIO 03: resuelve los siguientes problemas.

Problema 01. Un padre tiene 35 años y su hijo 5. ¿Al cabo de cuántos años será la edad del padre tres veces mayor que la edad del hijo?

Problema 02. Si al doble de un número se le resta su mitad resulta 54. ¿Cuál es el número?

Problema 03. La base de un rectángulo es doble que su altura. ¿Cuáles son sus dimensiones si el perímetro mide 30 cm?

Problema 04. En una reunión hay doble número de mujeres que de hombres y triple número de niños que de hombres y mujeres juntos. ¿Cuántos hombres, mujeres y niños hay si la reunión la componen 96 personas?

Problema 05. Se han consumido 7/8 de un bidón de aceite. Reponemos 38 l y el bidón ha quedado lleno hasta sus 3/5 partes. Calcula la capacidad del bidón.

Problema 06. Una granja tiene cerdos y pavos, en total hay 35 cabezas y 116 patas. ¿Cuántos cerdos y pavos hay?

Problema 07. Luís hizo un viaje en el coche, en el cual consumió 20 l de gasolina. El trayecto lo hizo en dos etapas: en la primera, consumió 2/3 de la gasolina que tenía el depósito y en la segunda etapa, la mitad de la gasolina que le queda.

Se pide:

1 Litros de gasolina que tenía en el depósito.
2 Litros consumidos en cada etapa.

Problema 08. Las tres cuartas partes de la edad del padre de Juan exceden en 15 años a la edad de éste. Hace cuatro años la edad de la del padre era doble de la edad del hijo. Hallar las edades de ambos.

	Juan	Padre de Juan
Hace cuatro años	x	2x
Hoy	x + 4	2x + 4

Problema 09. Trabajando juntos, dos obreros tardan en hacer un trabajo 14 horas. ¿Cuánto tiempo tardarán en hacerlo por separado si uno es el doble de rápido que el otro?

	Rápido	Lento
Tiempo	x	2x
Hora de trabajo	1/x	1/2x

Problema 10. Un camión sale de una ciudad a una velocidad de 40 km/h. Una hora más tarde sale de la misma ciudad y en la misma dirección y sentido un coche a 60 km/h.

Se pide:

Tiempo que tardará en alcanzarle.

Como el coche sale una hora más tarde, el tiempo que tardará en alcanzarlo será de 2 horas:

Distancia al punto de encuentro.

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Una ecuación de segundo grado o ecuación cuadrática de una variable es una ecuación que tiene la forma de una suma algebraica de términos cuyo grado máximo es dos, es decir, una ecuación cuadrática puede ser representada por un polinomio de segundo grado o polinomio cuadrático. La expresión canónica general de una ecuación cuadrática de una variable es:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad \text{donde } a \neq 0$$

Donde x es la variable, y a, b y c constantes; a es el coeficiente cuadrático (distinto de 0), b el coeficiente lineal y c es el término independiente. Este polinomio se puede interpretar mediante la gráfica de una función cuadrática, es decir, por una parábola. Esta representación gráfica es útil, porque las intersecciones o punto tangencial de esta gráfica, en el caso de existir, con el eje X coinciden con las soluciones reales de la ecuación.

En general para cualquier ecuación cuadrática de la forma $x^2 = a$, podemos utilizar la propiedad de raíz cuadrada para obtener la solución.

Propiedad de raíz cuadrada:

Si $x^2 = a$, $entonces\ x = \sqrt{a}\ o\ x = -\sqrt{a}$

La Fórmula de la ecuación cuadrática quedaría de la siguiente manera:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo:

$$x^2 + 8 = 89$$

$$x^2 = 89 - 8$$

$$x = \sqrt{81}$$

$$x = 9$$

EJERCICIO 04. Investiga y responde en tu cuaderno los siguientes ejercicios conceptuales.

1. Enuncia la propiedad de la raíz cuadrada, con sus palabras.
2. Explica cómo resolver, mediante la propiedad de la raíz cuadrada x^2 = 13.
3. Escribe la forma estándar de una ecuación cuadrática estándar.

EJERCICIO 05. Investiga, desarrolla y encuentra la solución a las siguientes expresiones.

1. $x^2 = 64$
2. $y^2 = 169$
3. $x^2 = 9$
4. $x^2 - 20 = 0$
5. $7x^2 = 7$
6. $16x^2 - 17 = 56$
7. $3x^2 + 5 = 20$
8. $2x^2 + 3 = 51$

EJERCICIO 06. Investiga, desarrolla y encuentra la solución de cada problema.

1. Escribe una ecuación que tenga la solución 7.
2. Llena el espacio vacío para obtener un enunciado verdadero. Explique cómo determino su respuesta. La ecuación $x^2 - ¿¿ 27$ tiene las soluciones 6 y -6.

SOLUCIÓN DE ECUACIONES CUADRÁTICAS

Hemos visto que una ecuación cuadrática es una ecuación en su forma **ax ² + bx + c = 0**, donde **a, b** , y **c** son números reales.

Pero este tipo de ecuación puede presentarse de diferentes formas:

Ejemplos:

9x ² + 6x + 10 = 0 **a** = 9, **b** = 6, **c** = 10.
3x ² – 9x + 0 = 0 **a** = 3, **b** = −9, c = 0 (el cero, la c, no se escribe, no está).
−6x ² + 0x + 10 = 0 **a** = -6, b = 0, c = 10 (el cero equis, la b, no se escribe).

Para resolver la ecuación cuadrática de la forma ax ² + bx + c = 0 (o cualquiera de las formas mostradas), puede usarse cualquiera de los siguientes métodos:

SOLUCIÓN POR FACTORIZACIÓN

En toda ecuación cuadrática uno de sus miembros es un polinomio de segundo grado y el otro es cero; entonces, cuando el polinomio de segundo grado pueda factorizarse, tenemos que convertirlo en un producto de binomios. Obtenido el producto de binomios, debemos buscar el valor de **x** de cada uno.

Para hacerlo igualamos a cero cada factor y se despeja para la variable. Igualamos a cero ya que sabemos que si un producto es igual a cero, uno de sus multiplicandos, o ambos, es igual a cero.

1) Resuelve:

$$(x + 3)(2x - 1) = 9$$

Lo primero es igualar la ecuación a cero.

Para hacerlo, multiplicamos los binomios:

$$2x^2 - x + 6x - 3 = 9$$
$$2x^2 + 5x - 3 = 9$$

Ahora, pasamos el 9, con signo contrario, al primer miembro para igualar a cero:

$$2x^2 + 5x - 3 - 9 = 0$$
$$2x^2 + 5x - 12 = 0$$

Ahora, podemos factorizar esta ecuación:

$$(2x - 3)(x + 4) = 0$$

Ahora podemos igualar a cero cada término del producto para resolver las incógnitas:

Si
$2x - 3 = 0$
$2x = 3$
$x = \frac{3}{2}$

Si
$x + 4 = 0$
$x = -4$

Esta misma ecuación pudo haberse presentado de varias formas:

$(x + 3)(2x - 1) = 9$

$2x^2 + 5x - 12 = 0$
$2x^2 + 5x = 12$
$2x^2 - 12 = -5x$

En todos los casos la solución por factorización es la misma:

2) Encuentra las posibles soluciones de:

$$x^3 - 8x^2 + 16x = 0$$

La ecuación ya está igualada a cero y solo hay que factorizar e igualar sus factores a cero y luego resolver en términos de **x**:

$$x(x^2 - 8x + 16) = 0$$
$$x(x - 4)(x - 4) = 0$$

Ahora, si: $x = 0$ o si $x - 4 = 0$
$x = 4$

EJERCICIO 07: desarrolla y resuelve cada una de las siguientes expresiones (ecuaciones de segundo grado), según aplique el método.

1) $(\mathbf{x}+5)(\mathbf{x}-2)=0$ 3) $9\mathbf{x}^2-4=0$ 5) $\mathbf{z}(2\mathbf{z}-3)=14$

2) $3\mathbf{y}^2+8\mathbf{y}-9=2\mathbf{y}$ 4) $\mathbf{a}^2-14\mathbf{a}=-45$ 6) $\mathbf{x}^3-22\mathbf{x}=9\mathbf{x}^2$

SOLUCIÓN POR COMPLETACIÓN DE CUADRADOS

Se llama método de la **completación de cuadrados** porque se puede completar un cuadrado geométricamente, y porque en la ecuación cuadrática se pueden realizar operaciones algebraicas que la transforman en una ecuación del tipo: $\mathbf{(ax + b)^2 = n}$

…en la cual el primer miembro de la ecuación $\mathbf{(ax + b)^2}$, es el cuadrado de la suma de un binomio.

Partiendo de una ecuación del tipo: $x^2+bx+c=0$

Por ejemplo, la ecuación

$\mathbf{x^2 + 8x = 48}$, que también puede escribirse $\mathbf{x^2 + 8x - 48 = 0}$

Al primer miembro de la ecuación $\mathbf{(x^2 + 8x)}$ le falta un término para completar el cuadrado de la suma de un binomio del tipo: $\mathbf{(ax + b)^2}$

Que es lo mismo que: $\mathbf{(ax + b)(ax + b)}$
Que es lo mismo que: $\mathbf{(ax)^2 + 2axb + b^2}$

En nuestro ejemplo

$\mathbf{x^2 + 8x = 48}$, el **8** representa al doble del segundo número del binomio, por lo tanto, ese número debe ser obligadamente 8 dividido por 2 (8/2), que es igual a 4, y como en el cuadrado de la suma de un binomio $\mathbf{(a^2 + 2ab + b^2)}$ el tercer término corresponde al cuadrado del segundo término $\mathbf{(4^2 = 16)}$ amplificamos ambos miembros de la ecuación por 16, así tenemos:

$x^2 + 8x + 16 = 48 + 16$
$\mathbf{x^2 + 8x + 16 = 64}$

…a cual, factorizando, podemos escribir como sigue:

$\mathbf{(x + 4)(x + 4) = 64}$

Que es igual a:

$\mathbf{(x + 4)^2 = 64}$

Extraemos raíz cuadrada de ambos miembros y tenemos: $\sqrt{(\mathbf{x}+4)^2}=\sqrt{64}$

Nos queda: $\mathbf{x + 4 = 8}$

Entonces: $\mathbf{x = 8 - 4}$
$\mathbf{x = 4}$

Se dice que **"se completó un cuadrado"** porque para el primer miembro de la ecuación se logró obtener la expresión $\mathbf{(x + 4)^2}$, que es el cuadrado perfecto de un binomio.

Veamos otro ejemplo:

Partamos con la ecuación: $\mathbf{x^2 + 6x - 16 = 0}$

Hacemos: $\mathbf{x^2 + 6x = 16}$

Luego, a partir de la expresión $\mathbf{x^2 + 6x}$ (primer miembro de la ecuación) debemos obtener una expresión de la forma $\mathbf{(ax + b)^2}$ (cuadrado de la suma de un binomio).

Para encontrar el término que falta hacemos:

$$\left(\frac{6}{2}\right)^2 = 3^2 = 9$$

(Para encontrar dicho término en cualquier ecuación siempre debemos dividir por 2 el valor real del segundo término y el resultado elevarlo al cuadrado).

Ahora, para obtener la expresión completa se suma 9 a ambos miembros de la ecuación:

$\mathbf{x^2 + 6x = 16}$
$\mathbf{x^2 + 6x + 9 = 16 + 9}$
$\mathbf{x^2 + 6x + 9 = 25}$
Factorizamos y queda:

$\mathbf{(x + 3)(x + 3) = 25}$

$\mathbf{(x + 3)^2 = 25}$

La expresión $\mathbf{x^2 + 6x}$ se ha completado para formar un cuadrado perfecto, en este caso $\mathbf{(x + 3)^2}$, y así la ecuación se resuelve con facilidad:

Extraemos raíz cuadrada:

$\sqrt{(x+3)^2} = \sqrt{25}$, y queda:

$\mathbf{x + 3 = 5}$ **y** $\mathbf{x + 3 = -5}$ (pues $5^2 = 5$ y también $(-5)^2 = 5$

Entonces:

$\mathbf{x = 5 - 3}$
$\mathbf{x = 2}$

Y

$\mathbf{x = -5 - 3}$
$\mathbf{x = -8.}$

La ecuación **1** da $\mathbf{x = 2}$ y la ecuación **2** da $\mathbf{x = -8}$

Otro ejemplo para analizar y estudiar:

Resolver la ecuación: $\mathbf{x^2 - 6x + 8 = 0.}$

Veamos: Con los términos $\mathbf{x^2}$ **y** $\mathbf{-6x}$ podemos formar el cuadrado de binomio $\mathbf{(x - 3)^2}$, pero nos faltaría el término igual a 9, por lo tanto, dejamos las equis (x) a la izquierda y pasamos el 8 a la derecha de la igualdad:

$$\mathbf{x^2 - 6x = -8}$$

…y sumamos 9 a ambos lados de la igualdad para que a la izquierda se forme el cuadrado de binomio:

¿Cómo encontramos el término que falta?, haciendo:

$$\left(\frac{-6}{2}\right)^2 = -3^2 = 9$$

$\mathbf{x^2 - 6x = -8}$ /+9 (sumamos 9 en ambos miembros de la ecuación)

$x^2 - 6x + 9 = -8 + 9$

$\mathbf{(x - 3)^2 = 1}$

Extraemos las raíces cuadradas:

$\sqrt{(x-3)^2} = \sqrt{1}$, y queda:

$x - 3 = 1$ y **$x - 3 = -1$**

Si:
$x - 3 = 1$
$x = 1 + 3$
$x = 4$

Si:
$x - 3 = -1$
$x = -1 + 3$
$x = 2$

Por lo tanto: **$x_1 = 4$** y **$x_2 = 2$.**

Debemos hacer notar que el método de completar cuadrados terminará en lo mismo que la fórmula general, porque es de este método de donde sale dicha fórmula, usada en el método que vemos a continuación.

SOLUCIÓN POR LA FÓRMULA GENERAL

Existe una fórmula que permite resolver cualquier ecuación de segundo grado, que es la siguiente: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$

La fórmula genera dos respuestas: Una con el signo **más (+)** y otra con el signo **menos (−)** antes de la raíz. Solucionar una ecuación de segundo grado se limita, entonces, a identificar las letras **a**, **b** y **c** y sustituir sus valores en la fórmula.

La fórmula general para resolver una ecuación de segundo grado sirve para resolver cualquier ecuación de segundo grado, sea **completa** o **incompleta**, y obtener buenos resultados tiene que ver con las técnicas de **factorización.**

Ejemplo:

Resolver la ecuación: **$2x^2 + 3x - 5 = 0$**

Vemos claramente que: **$a = 2$,** **$b = 3$** y **$c = -5$**, así es que:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5)}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 40}}{4} = \frac{-3 \pm 7}{4}$$

Ahora, tenemos que obtener las dos soluciones, con el + y con el −:

$x = \frac{-3+7}{4} = \frac{4}{4} = 1$, y también: $x = \frac{-3-7}{4} = \frac{-10}{4} = \frac{-5}{2}$

Así es que las soluciones son:

$x = 1$ **y** $x = \frac{-5}{2}$

¡IDENTIFIQUEMOS ALGO MUY IMPORTANTE!

En la fórmula para resolver las ecuaciones de segundo grado aparece la expresión $\sqrt{b^2 - 4ac}$. Esa raíz cuadrada sólo existirá cuando el radicando (**$b^2 - 4ac$**) sea positivo o cero.

El radicando **$b^2 - 4ac$** se denomina **discriminante** y se simboliza por **Δ**. El número de soluciones **(llamadas también raíces)** depende del signo de **Δ** y se puede determinar incluso antes de resolver la ecuación.

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$$

Entonces, estudiando el signo del discriminante (una vez resuelto), podemos saber el número de soluciones que posee:

- ✓ Si Δ es positivo, la ecuación tiene dos soluciones.
- ✓ Si Δ es negativo, la ecuación no tiene solución.
- ✓ Si Δ es cero, la ecuación tiene una única solución.

En el ejemplo anterior el discriminante era **Δ = 49**, positivo, por eso la ecuación tenía dos soluciones.

Obtendremos dos soluciones, una cuando sumamos a − b la raíz y lo dividimos por 2a, y otra solución cuando restamos a − b la raíz y lo dividimos por 2a.

TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

Es un trinomio que puede expresarse como el cuadrado de un binomio.

A continuación algunos ejemplos:

1 $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$

2 $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$

3 $x^2 - 20x + 100 = (x - 10)^2$

Como resolver una ecuación cuadrática por el método completar el cuadrado se ilustra con el siguiente ejemplo:

$$x^2+6-7=0$$
$$x^2+6=7$$

Ahora determinamos el valor de la mitad del coeficiente numérico del término con x. En este ejemplo, el termino x es 6x.

$$\frac{1}{2}(6)=3$$

Elevamos al cuadrado este número,

$$(3)^2=9$$

Y luego sumamos este producto en ambos lados de la ecuación.

$$x^2+6x+9=7+9$$
$$x^2+6x+9=16$$

Al seguir este procedimiento, producimos un trinomio cuadrado perfecto en el lado izquierdo de la ecuación. La expresión x^2+6x+9 es un trinomio cuadrado perfecto que puede expresarse como $(x + 3)^2$.

$$(x+3)^2=16$$
$$x+3=\pm\sqrt{16}$$
$$x=\pm 4$$

Por último, despejamos x, restando 3 en ambos lados de la ecuación.

$$x+3-3=-3\pm 4$$
$$x=-3\pm 4$$

$$x = -3 + 4 \, o \;\; x = -3 - 4$$
$$x = 1 \, o \, x = 7$$

EJERCICIO 08: desarrolla y resuelve cada una de las siguientes expresiones (ecuaciones de segundo grado).

1. $x^2 + 7x + 10 = 0$ **3.** $x^2 + 3x + 2 = 0$ **5.** $x^2 - 8x + 7 = 0$

2. $r^2 + r - 30 = 0$ **4.** $m^2 - 9m + 14 = 0$

ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO INCOMPLETA

Una ecuación de segundo grado es **incompleta** cuando los términos **b** o **c**, o ambos, son cero.

(Si **a = 0**, la ecuación resultante sería **bx + c = 0**, que no es una ecuación de segundo grado.)
La expresión de una ecuación de segundo grado incompleta es:

$ax^2 = 0$; si b = 0 y c = 0.

$ax^2 + bx = 0$; si c = 0.

$ax^2 + c = 0$; si b = 0.

Algunos ejemplos, con soluciones…

1) Resolver: $-5x^2 + 13x + 6 = 0$

Se identifican las letras, cuidando que la ecuación esté ordenada respecto a la **x** , de grado mayor a menor. Con esta condición tenemos: **a = – 5; b = 13; c = 6.**

Se aplica la fórmula:

$$x = \frac{-13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot (-5) \cdot 6}}{2 \cdot (-5)} = \frac{-13 \pm \sqrt{169 - (-120)}}{-10} = \frac{-13 \pm \sqrt{289}}{-10}$$

Como la raíz buscada es 17 (el cuadrado de 17 es 289), se tiene entonces que:

$$x = \frac{-13 \pm 17}{-10}$$

Según esto, tendremos dos raíces diferentes, una usando el signo + y otra usando el signo −.

Llamaremos X_1 y X_2 a las dos soluciones, que serán:

$$x_1 = \frac{-13 + 17}{-10} = \frac{4}{-10} = -\frac{2}{5} \qquad x_2 = \frac{-13 - 17}{-10} = \frac{-30}{-10} = 3$$

Ambos valores de x satisfacen la ecuación, es decir, al sustituirlos en ella producen una identidad. Al procedimiento de sustituir para probar si los valores hallados satisfacen la ecuación se le denomina **verificación**.

Probando con x = 3. Resulta: **−5 • (3)2 + 13 • (3) + 6 = −45 + 39 + 6 = 0**, tal como se esperaba en el segundo miembro.

Probando con $x = -\frac{2}{5}$, se tiene:

$$-5\left(-\frac{2}{5}\right)^2 + 13\left(-\frac{2}{5}\right) + 6 = -5\left(\frac{4}{25}\right) + \left(-\frac{26}{5}\right) + 6 = -\frac{\overset{4}{\cancel{20}}}{\underset{5}{\cancel{25}}} - \frac{26}{5} + 6 = -\frac{4}{5} - \frac{26}{5} + 6 = -\frac{\overset{6}{\cancel{30}}}{\underset{1}{\cancel{5}}} + 6 = -6 + 6 = 0$$

Como ambas respuestas producen identidades, ahora es seguro que 3 y $-\frac{2}{5}$ son las raíces de **$-5x^2 + 13x + 6 = 0$.**

2) Resolver: $6x - x^2 = 9$

Hacemos los cambios necesarios para que la ecuación tenga la forma conocida. Trasponiendo y cambiando de lugar resulta:

$-x^2 + 6x - 9 = 0$. Ahora se identifican las letras:

$a = -1$; $b = 6$; $c = -9$; y se aplica la fórmula:

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-9)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 36}}{-2} = \frac{-6 \pm \sqrt{0}}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3$$

El discriminante (Δ) es igual a cero, por lo cual se producen dos raíces iguales a 3, es decir, $x_1 = x_2 = 3$.
Sustituyendo los valores en la ecuación original, se verifica que: **$6 \bullet 3 - 32 = 18 - 9 = 9$** con lo cual se ha comprobado la respuesta.

EJERCICIO 09: en los siguientes problemas (ya solucionados), tu catedrático/a te irá detallando la solución de estos. Podrás observar que los siguientes planteamientos podrás ser expresados como ecuaciones de segundo grado.

Para hacerlo, hay que entender la lógica del problema, identificando como **x** a una de las variables que el problema establece; luego deben escribirse las relaciones entre la variable, de acuerdo al planteamiento y, finalmente, se resuelve la ecuación.

Hay que destacar que sólo la experiencia mejora los resultados. Para practicar, los interesados pueden consultar el "Algebra" de Aurelio Baldor, que, para muchos, es la biblia del álgebra.

Problema 1. La suma de dos números es 10 y la suma de sus cuadrados es 58. Halle ambos números.

Primero se asigna la variable **x** a una de las incógnitas del problema. Hay dos incógnitas que son ambos números, como el problema no hace distinción entre uno y otro, puede asignarse **x** a cualquiera de los dos, por ejemplo:

x = Primer número

Como la suma de ambos es 10, entonces necesariamente el otro será:

10 − x = Segundo número

Para entenderlo mejor:

Si entre su amigo y usted tienen $ 1.000, y su amigo tiene $ 400, ¿Cuánto tiene usted?, obviamente, restando el total menos 400, es decir 1.000 − 400 = $ 600. Si su amigo tiene $ **x**, la cuenta no cambia, sólo que no sabrá el valor sino en función de**x** , es decir, usted tiene 1.000 − x .

La condición final del problema establece que la suma de los cuadrados de ambos números resulta 58, entonces:

$$\mathbf{x^2 + (10 - x)^2 = 58}$$

Esta es la ecuación a resolver.

Para hacerlo, aplicamos algunas técnicas de **álgebra elemental** y luego reordenamos para llegar a la fórmula conocida.

Vemos que la operación indicada entre paréntesis es el cuadrado de un binomio. Es un error muy común que los estudiantes escriban: $(a - b)^2 = a^2 - b^2$, lo cual es incorrecto. La expresión correcta es: $(a - b)^2 = a^2 - 2 \bullet a \bullet b + b^2$

Desarrollando la ecuación se tiene: **$x^2 + 10^2 - 2 \bullet 10 \bullet x + x^2 = 58 = x^2 + 100 - 20 \bullet x + x^2 = 58$**

Ordenando y agrupando: $\mathbf{2x^2 - 20 \bullet x + 42 = 0}$;

Dividiendo entre 2 toda la ecuación: $\mathbf{x^2 - 10x + 21 = 0}$

Ahora podemos aplicar la fórmula general para resolver la ecuación de segundo grado y llegaremos a $\mathbf{x_1 = 7}$ y $\mathbf{x_2 = 3}$.

Veamos, si tenemos:

a = 1, b = −10, c = 21

$$\mathbf{x} = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 21}}{2 \cdot 1} = \mathbf{x} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 84}}{2} = \mathbf{x}\frac{10 \pm \sqrt{16}}{2} =$$

$$\mathbf{x} = \frac{10 \pm 4}{2}$$

$$\mathbf{x}_1 = \frac{10 + 4}{2} = \frac{\overset{7}{\cancel{14}}}{\underset{1}{\cancel{2}}} = 7$$

$$\mathbf{x}_2 = \frac{10 - 4}{2} = \frac{\overset{3}{\cancel{6}}}{\underset{1}{\cancel{2}}} = 3$$

Los números buscados son **7 y 3**.

Problema 02. El largo de una sala rectangular es 3 metros mayor que el ancho. Si el ancho aumenta 3 m y el largo aumenta 2 m, el área se duplica. Halle el área original de la sala.

Largo y ancho son diferentes. El problema permite que la variable **x** se asigne a cualquiera de las dos incógnitas, largo o ancho.

Supongamos que:

x = ancho de la sala

El largo es 3 metros mayor que el ancho, así es que:

x + 3 = largo de la sala.

El área de un rectángulo es la multiplicación de ambos:

x • (x + 3) = área de la sala.
Téngase en cuenta que estos son los datos iniciales.

Las condiciones del problema explican que el ancho aumenta en 3 metros y el largo aumenta en 2 metros, así que, luego del aumento quedan:

x + 3 = nuevo ancho de la sala
x + 5 = nuevo largo de la sala

(x + 3) • (x + 5) = nueva área de la sala

Según los datos del problema, el área se ha duplicado, así es que planteamos la ecuación:

$$\mathbf{(x + 3) \bullet (x + 5) = 2 \bullet x \bullet (x + 3)}$$

Se efectúan las multiplicaciones: $\mathbf{x^2 + 5x + 3x + 15 = 2x^2 + 6x}$

Se pasa todo al primer miembro: $\mathbf{x^2 + 5x + 3x + 15 - 2x^2 - 6x = 0}$

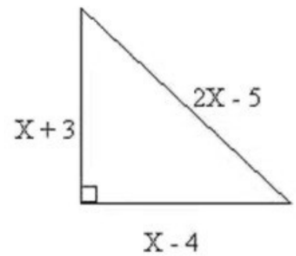
Se simplifica: $-x^2 + 2x + 15 = 0$ Esta es la ecuación a resolver.

Se aplica la fórmula conocida y resulta: $x_1 = 5$ y $x_2 = -3$.

La solución $x = -3$ se desecha, ya que **x** es el ancho de la sala y no puede ser negativo. Se toma como única respuesta que el ancho original (**x**) era 5 metros.

Como el largo inicial $x + 3 = 8$ metros, **el área original era 8m • 5m = 40 m ^{2}**.

Problema 03. Halle el área y perímetro del triángulo rectángulo mostrado. Las dimensiones están en metros.



Como es un triángulo rectángulo se cumple el **Teorema de Pitágoras**: "El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos" ($c^2 = a^2 + b^2$). La hipotenusa es el lado mayor (2x − 5) y los otros dos son los catetos, se plantea entonces la ecuación: $(x + 3)^2 + (x - 4)^2 = (2x - 5)^2$
Desarrollando cada binomio al cuadrado, se tiene:

$x^2 + 2 \bullet 3 \bullet x + 3^2 + x^2 - 2 \bullet 4 \bullet x + 4^2 = (2x)^2 - 2 \bullet (2x) \bullet 5 + 5^2 = x^2 + 6x + 9 + x^2 - 8x + 16 = 4x^2 - 20x + 25.$

Reagrupando: $x^2 + 6x + 9 + x^2 - 8x + 16 - 4x^2 + 20x - 25 = 0$

Finalmente: $-2x^2 + 18x = 0$

Es la ecuación a resolver:

Las raíces de la ecuación son $x_1 = 0$ y $x_2 = 9$.

La solución $x = 0$ se desecha, ya que entonces un cateto sería −4 m, lo cual no es posible. La solución es entonces, $x = 9$. De esta manera, el triángulo queda con catetos 12 metros y 5 metros y con hipotenusa 13 metros.

El área de un triángulo es base por altura dividido 2; la base y la altura son los dos catetos que están a 90°, por lo tanto el área es:

$$\mathbf{A} = \frac{12 \cdot 5}{2} = 30\,\mathbf{m}^2$$

El perímetro es la suma de los lados, es decir, P = 12 m + 5 m + 13 m = **30 m**

Nota importante... *Cada método de solución es aplicable según sea la naturaleza de la ecuación cuadrática, pero siempre es posible aplicar el método de completación de cuadrado de binomio y el de la aplicación de la fórmula de las soluciones generales de una ecuación cuadrática.*

ECUACIONES BICUADRADAS

Son las ecuaciones de cuarto grado que carecen de términos de grado impar.

Ejemplo:

$$x^4 - 20x^2 + 64 = 0$$

Puedes observar que:

- ✓ 1º es una ecuación de cuarto grado.
- ✓ 2º carece de términos con exponente impar.

¿CUÁNTAS RESPUESTAS O RAÍCES TIENE UNA ECUACIÓN DE 4º GRADO?

Las ecuaciones de cuarto grado tienen 4 respuestas.

¿CÓMO SE RESUELVEN?

Lo mismo que las ecuaciones de 2º grado pero haciendo un pequeño cambio: *al término en:*

$$x^2 \text{ lo sustituimos por } y.$$

Si x^2 *lo sustituimos por "y" el valor de* x^4 *lo sustituiremos por* $(x^2)^2$ *que equivale a* $(y)^2 = y^2$. *Teniendo en cuenta el contenido de las líneas anteriores la ecuación bicuadrada:* $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$

…podemos escribir: $y^2 - 20y + 64 = 0$

Ahora, lo resolvemos como una ecuación completa de 2º grado:

$$y = \frac{20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \times 64}}{2} = \frac{20 \pm 12}{2} = \left\langle \begin{array}{l} y_1 = 16 \\ y_2 = 4 \end{array} \right.$$

como "y" equivale a x^2 , podemos escribir : $x^2 = 16$ de donde el valor de: $x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$
Tomando la otra respuesta de y, $y_2 = 4; x^2 = 4$ *de donde el valor de* $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2.$

$$\text{Las respuestas de x son:} \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -4 \\ x_3 = 2 \\ x_4 = -2 \end{cases}$$

EJERCICIO 10: desarrolla en hojas aparte cada uno de los siguientes ejercicios, escribe tu respuesta en el recuadro en blanco.

Problema 01. Resuelve la siguiente ecuación bicuadrada: $4x^4 - 37x^2 + 9 = 0$

Problema 02. Calcula las respuestas de *x* en la ecuación: $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

Problema 03. Calcula las respuestas de *x* en la ecuación: $9x^4 - 10x^2 + 1 = 0$

Problema 04. Calcula las respuestas de *x* en la ecuación: $2^{x^4 - 13x^2 + 31} = 32^{-1}$

Problema 05. Calcula el valor de *x* en la ecuación: $\frac{6}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} = 2$

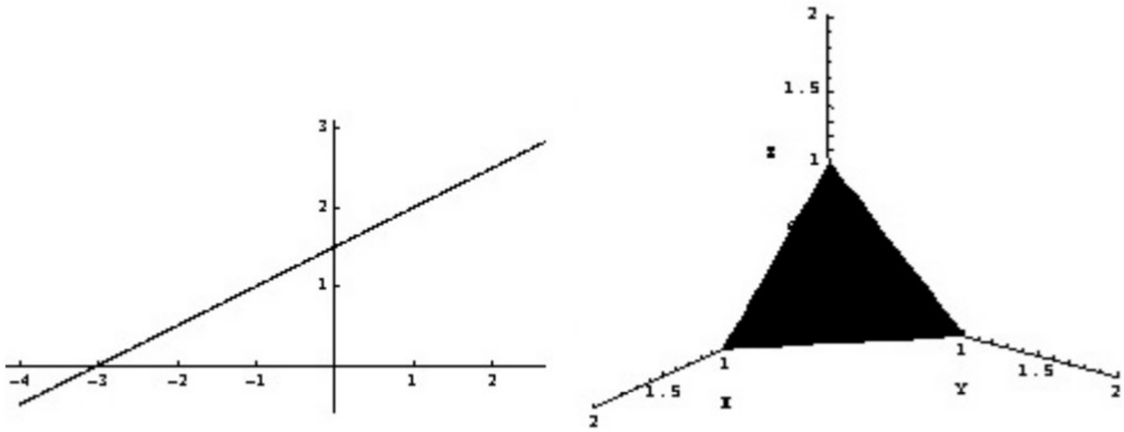
¡PUNTOS EXTRAS! Resuelve los siguientes problemas con el método de ecuaciones de segundo grado.

1. Determinar k de modo que las dos raíces de la ecuación x2 − kx + 36 = 0 sean iguales.
2. La suma de dos números es 5 y su producto es −84. Halla dichos números.
3. Dentro de 11 años la edad de Pedro será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 13 años. Calcula la edad de Pedro.
4. Para vallar una finca rectangular de 750 m² se han utilizado 110 m de cerca. Calcula las dimensiones de la finca.
5. Escribir una ecuación de segundo grado cuyas soluciones son: 3 y −2.

SISTEMAS DE ECUACIONES

Se denomina ecuación lineal a aquella que tiene la forma de un polinomio de primer grado, es decir, las incógnitas no están elevadas a potencias, ni multiplicadas entre sí, ni en el denominador. Por ejemplo… $3x + 2y + 6z = 6$

Es una ecuación lineal con tres incógnitas. Como es bien sabido, las ecuaciones lineales con 2 incógnitas representan una recta en el plano. Si la ecuación lineal tiene 3 incógnitas, su representación gráfica es un plano en el espacio. Un ejemplo de ambas representaciones puede observarse en la figura:



Representación gráfica de la recta $-x + 2y = 3$ en el plano y del plano $x + y + z = 1$ en el espacio. El objetivo del tema es el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales, es decir, un conjunto de varias ecuaciones lineales. Diremos que dos ecuaciones son equivalentes si tienen las mismas soluciones, o geométricamente representan la misma recta o plano.

Se llama sistema de ecuaciones *todo conjunto de ecuaciones distintas que tiene una o más soluciones comunes.* Resolver un sistema de ecuaciones simultáneas es hallar el conjunto de valores que satisfacen simultáneamente cada una de sus ecuaciones.

Características de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

Los resultados característicos de resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables son:

- ✓ Existe únicamente una solución.
- ✓ Existe una cantidad infinita de soluciones.
- ✓ No existe solución.

Un sistema es *consistente* si tiene por lo menos una solución. Un sistema con un número infinito de soluciones es *dependiente y consistente.* Un sistema es *inconsistente* si carece de solución. Para resolver un sistema de N ecuaciones con N incógnitas podemos utilizar uno de los siguientes métodos: Sustitución, Igualación y Reducción.

CRITERIOS DE EQUIVALENCIA

1º Si a ambos miembros de una ecuación de un sistema se les suma o se les resta una misma expresión, el sistema resultante es equivalente.

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 3x - 4y + 3 = -6 + 3 \\ 2x + 4y - 5y = 16 - 5y \end{cases}$$

x = 2, y = 3

2º Si multiplicamos o dividimos ambos miembros de las ecuaciones de un sistema por un número distinto de cero, el sistema resultante es equivalente.

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 3 \cdot (3x - 4y) = -6 \cdot 3 \\ \dfrac{2x + 4y}{2} = \dfrac{16}{2} \end{cases}$$

x = 2, y = 3

3º Si sumamos o restamos a una ecuación de un sistema otra ecuación del mismo sistema, el sistema resultante es equivalente al dado.

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y + 3x - 4y = 16 - 6 \end{cases}$$

x = 2, y = 3

4º Si en un sistema se sustituye una ecuación por otra que resulte de sumar las dos ecuaciones del sistema previamente multiplicadas o divididas por números no nulos, resulta otro sistema equivalente al primero.

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ \dfrac{2x + 4y}{2} = \dfrac{16}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 4y + x + 2y = -6 + 8 \\ x + 2y = 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 2 \\ x + 2y = 8 \end{cases} \qquad x = 2, \quad y = 3$$

5º Si en un sistema se cambia el orden de las ecuaciones o el orden de las incógnitas, resulta otro sistema equivalente.

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + 4y = 16 \\ 3x - 4y = -6 \end{cases} \qquad x = 2, \quad y = 3$$

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -4y + 3x = -6 \\ 4y + 2x = 16 \end{cases} \qquad x = 2, \quad y = 3$$

COMPATIBILIDAD DEL SISTEMA

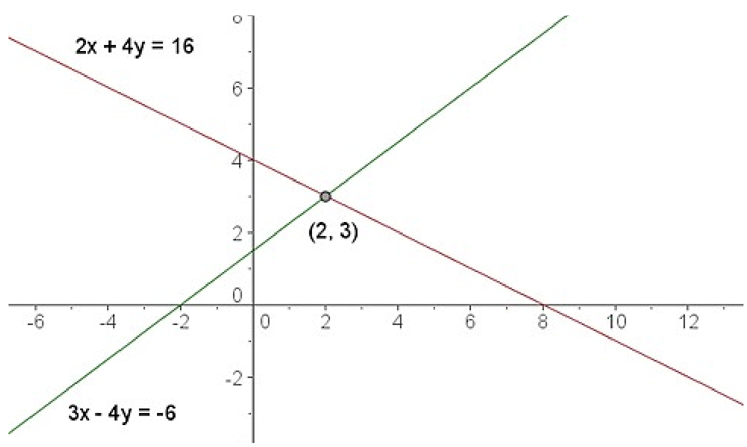
SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO

Este sistema se caracteriza por tener única solución.

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases}$$

x = 2, y = 3

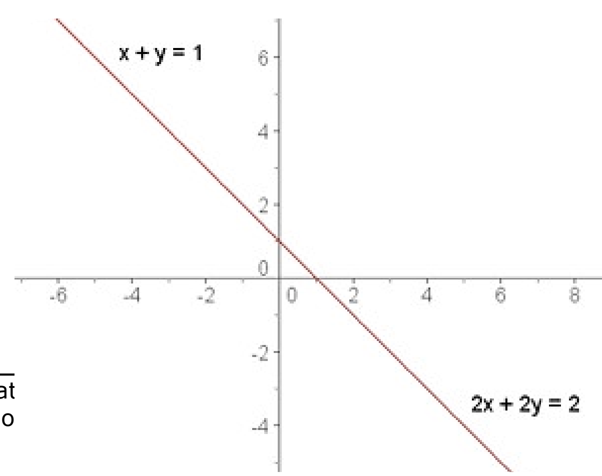
Gráficamente la solución es **el punto de corte de las dos rectas.**



SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO

El sistema tiene infinitas soluciones.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} -2x - 2y = -2 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$
$$0 = 0$$



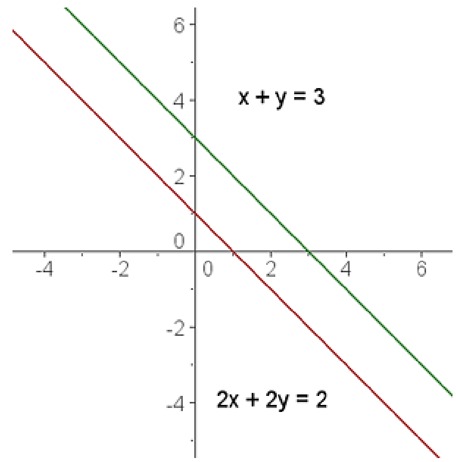
Gráficamente obtenemos **dos rectas coincidentes**. Cualquier punto de la recta es solución.

SISTEMA INCOMPATIBLE

No tiene solución

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} -2x - 2y = -6 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$
$$0 = -4$$

Gráficamente obtenemos dos rectas paralelas.



MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

Para resolver sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas (de 2 x 2) de primer grado, por el *método de sustitución*, debes realizar lo siguiente:

- ✓ Despejar una de las incógnitas en una cualquiera de las ecuaciones.
- ✓ Se sustituye la expresión obtenida en la otra ecuación y se resuelve la ecuación de primer grado en una incógnita que resulta de esta sustitución.
- ✓ Una vez calculada la primera incógnita, se calcula la otra en la ecuación despejada obtenida en el primer paso.

Evidentemente, aun cuando la incógnita que se va a despejar en el primer paso puede ser cualquiera y de cualquier ecuación, es mejor, por la facilidad de los cálculos posteriores, hacer una buena elección de ambas… *"incógnita y ecuación"*. Es decir, será más fácil operar después si, por ejemplo, se elige una incógnita en una ecuación en la que "no tenga" coeficiente (es decir, que su coeficiente sea *1*), ya que, en ese caso, podremos evitar el cálculo con fracciones.

Anteriormente se ha mencionado que, de manera simultánea, se puede ir haciendo la discusión del sistema.

¿Cómo?

Pues bien, si en el proceso de sustituir la incógnita despejada en el primer paso en la otra ecuación e intentar resolverla nos quedase una expresión del tipo "*0 = 0*", o "*K = K*", siendo *K* un número cualquiera (por ejemplo, *4 = 4*), tendremos que el sistema es *compatible indeterminado* y tiene **infinitas** soluciones. Esto se debe a que, en ese caso, una de las ecuaciones es múltiplo de la otra y el sistema quedaría reducido a una sola ecuación, con lo que habría infinitos pares de números *(x, y)* que la cumplirían. Este tipo de ecuación (*0 = 0*) se llama *ecuación trivial*.

Por otro lado, si la ecuación que nos resultase en el proceso anteriormente explicado fuera de la forma "*K = 0*", siendo *K* cualquier número distinto de *0*, tendremos que el sistema es *incompatible* por lo que, en ese caso, **no tiene solución.** Esto es claro por la imposibilidad de la expresión aparecida. Este tipo de ecuación (*K = 0*) se llama *"ecuación degenerada"*. No habría, por tanto, ningún par de números *(x, y)* que cumplieran ambas ecuaciones del sistema.

Por último, si no nos encontramos, al resolver el sistema, ninguna de los tipos antes descritos de ecuaciones (triviales y degeneradas) y llegamos, al final de su resolución, a un valor para la incógnita *x* y a otro para la *y*, estos dos valores formarán el par *(x, y)* que nos da la solución del sistema y éste tendrá, por tanto, una **única solución** y será un sistema *compatible determinado*.

Continuando con el ejemplo de Ana y Sergio (empleado para ejemplificar los métodos anteriores)…

Entre Ana y Sergio tienen Q 600.00, pero Sergio tiene el doble de Quetzales que Ana. ¿Cuánto dinero tiene cada uno?

Llamemos *x* al número de Quetzales de Ana e *y* al de Sergio. Vamos a expresar las condiciones del problema mediante ecuaciones: Si los dos tienen Q 600.00, esto nos proporciona la ecuación $x + y = 600$.

Si Sergio tiene el doble de Quetzales que Ana, tendremos que $y = 2x$. Ambas ecuaciones juntas forman el siguiente sistema:

$$x + y = 600 \quad y = 2x$$

Vamos a resolver el sistema por el método de sustitución, ya que en la 2ª ecuación hay una incógnita, la *y*, ya despejada. Sustituimos el valor de $y = 2x$ en la primera ecuación, con lo que tendremos:

$$x + 2x = 600 \Rightarrow 3x = 600 \Rightarrow x = \frac{600}{3} \Rightarrow x = 200$$

Ahora sustituimos $x = 200$ en la ecuación en la que estaba despejada la *y*, con lo que tendremos:

$$y = 2x \Rightarrow y = 400$$

Por tanto, la solución al problema planteado es que Ana tiene 200 Quetzales y Sergio tiene 400 Quetzales.
Por ejemplo:

Intentemos resolver:

$$\begin{cases} 4x + 3y = 7 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

La primera ecuación se puede reescribir de la forma:

$$2 \cdot (2x) + 3y = 7$$

Por otra parte, de la segunda ecuación del sistema se deduce que

$$2x = 1 + y$$

Sustituyendo $2x$ por $1 + y$ en

$$2 \cdot (2x) + 3y = 7$$

se tiene que…

$$2 \cdot (1 + y) + 3y = 7$$

que es una ecuación con solo una incógnita y cuya solución es $y = 1$.

Sustituyendo y por uno en la primera ecuación del sistema de ecuaciones de partida obtenemos una ecuación de una sola incógnita…

$$4 + 3y = 7$$

cuya solución es $x = 1$.

Otro ejemplo:

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases}$$

Despejamos una de las incógnitas en una de las dos ecuaciones. Elegimos la incógnita que tenga el coeficiente más bajo.

$$2x = 16 - 4y \qquad x = 8 - 2y$$

Sustituimos en la otra ecuación la variable x, por el valor anterior:

$$3(8 - 2y) - 4y = -6$$

Resolvemos la ecuación obtenida:

$$24 - 6y - 4y = -6 \qquad -10y = -30 \qquad y = 3$$

Sustituimos el valor obtenido en la variable despejada.

$$x = 8 - 2 \cdot 3 = 8 - 6 \qquad x = 2$$

Solución…

$$x = 2,\ y = 3$$

MÉTODO DE IGUALACIÓN

Supongamos que tenemos dos ecuaciones:

$$\begin{cases} a = b \\ a = c \end{cases}$$

donde a, b, y c representan simplemente los miembros de estas ecuaciones (son expresiones algebraicas).
De las dos igualdades anteriores se deduce que…

$$b = c$$

Si resulta que una incógnita del sistema de ecuaciones no aparece ni en a ni en b, entonces la ecuación…

$$b = c$$

no contendría dicha incógnita.

Este proceso de eliminación de incógnitas se puede repetir varias veces hasta llegar a una ecuación con solo una incógnita, digamos x .

Una vez que se obtiene la solución de esta ecuación se sustituye x por su solución en otras ecuaciones en las que aparezca x para reducir el número de incógnitas en dichas ecuaciones.

El sistema de ecuaciones…

$$\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ 2x + 4y = 6 \end{cases}$$

es equivalente a este otro…

$$\begin{cases} 2x = -1 + 3y \\ 2x = 6 - 4y \end{cases}$$

El segundo sistema lo he obtenido pasando los términos en y del miembro de la izquierda al miembro de la derecha en cada una de las ecuaciones del primer sistema.

Del segundo sistema se deduce que…

$$-1 + 3y = 6 - 4y$$

que es una ecuación con una sola incógnita cuya solución es $y = 1$.

Sustituyendo y por 1 en la primera ecuación del sistema de partida se tiene que…

$$2x - 3 = -1$$

que es una ecuación con una sola incógnita y cuya solución es $x = 1$.

El método de igualación consiste en una pequeña variante del antes visto de sustitución. Para resolver un sistema de ecuaciones por este método hay que despejar una incógnita, la misma, en las dos ecuaciones e igualar el resultado de ambos despejes, con lo que se obtiene una ecuación de primer grado.
Las fases del proceso son las siguientes:

- ✓ Se despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones.
- ✓ Se igualan las expresiones obtenidas y se resuelve la ecuación lineal de una incógnita que resulta.
- ✓ Se calcula el valor de la otra incógnita sustituyendo la ya hallada en una de las ecuaciones despejadas de primer paso.

Ejemplo…

Entre Ana y Sergio tienen Q 600.00, pero Sergio tiene el doble de Quetzales que Ana.

¿Cuánto dinero tiene cada uno?

Llamemos x al número de Quetzales de Ana e y al de Sergio. Vamos a expresar las condiciones del problema mediante ecuaciones: Si los dos tienen Q 600.00, esto nos proporciona la ecuación x + y = 600.

Si Sergio tiene el doble de Quetzales que Ana, tendremos que y = 2x. Ambas ecuaciones juntas forman el siguiente sistema:

$$x+y=600$$
$$y=2x$$

Vamos a resolver el sistema por el método de igualación y ya que en la 2ª ecuación hay una incógnita, la y, despejada, vamos a despejar la misma incógnita en la otra ecuación, con lo que tendremos:

$$y=2x$$

$$\Rightarrow 2x=600-x \Rightarrow 2x+x=600 \Rightarrow 3x=600 \Rightarrow x=\frac{600}{3}=200$$

$$y=600-x$$

Ahora, sustituimos x = 200 en una de las ecuaciones en las que estaba despejada la y, con lo que tendremos:

$$y=2x \Rightarrow y=400$$

Por tanto, la solución al problema planteado es que Ana tiene Q 200.00 y Sergio tiene Q 400.00; es decir, el mismo resultado, evidentemente, que habíamos obtenido con el método de sustitución.

MÉTODO POR REDUCCIÓN

Este método analítico de solucionar sistemas de ecuaciones, consiste en multiplicar una o ambas ecuaciones por algún(os) número(s) de forma que obtengamos un sistema equivalente al inicial; en el que los coeficientes de la *"x"* o los de la *"y"* sean iguales, pero con signo contrario.

Se suman las ecuaciones del sistema para obtener una sola ecuación de primer grado con una incógnita.
Una vez resuelta esta, hay dos opciones para hallar la otra incógnita…
Una consiste en volver a aplicar el mismo método (sería la opción más pura de *reducción*); la otra es sustituir la incógnita hallada en una de las ecuaciones del sistema y despejar la otra.

Veamos el proceso por fases:

- ✓ Se multiplican las ecuaciones por los números apropiados para que, en una de las incógnitas, los coeficientes queden iguales, pero de signo contrario,
- ✓ Se suman ambas ecuaciones del nuevo sistema, equivalente al anterior.
- ✓ Se resuelve la ecuación lineal de una incógnita que resulta.
- ✓ Para este paso hay dos opciones:

    - Se repite el proceso con la otra incógnita.

- Se sustituye la incógnita ya hallada en una de las ecuaciones del sistema y se despeja la otra.

Veamos de nuevo el mismo ejemplo resuelto por el método anterior, resuelto por el *método de reducción*…
Entre Ana y Sergio tienen Q 600.00, pero Sergio tiene el doble de Quetzales que Ana. ¿Cuánto dinero tiene cada uno?

Llamemos *x* al número de Quetzales de Ana e *y* al de Sergio. Vamos a expresar las condiciones del problema mediante ecuaciones: Si los dos tienen Q 600.00, esto nos proporciona la ecuación $x + y = 600$.

Si Sergio tiene el doble de Quetzales que Ana, tendremos que $y = 2x$. Ambas ecuaciones juntas forman el siguiente sistema:

$$x+y=600$$

$$2x-y=0$$

Vamos a resolver el sistema por el método de reducción. Para ello, teniendo en cuenta que, en ambas ecuaciones, la *y* tiene coeficientes opuestos, podemos pasar a sumar directamente ambas y nos quedará:

$$3x=600 \Rightarrow x=\frac{600}{3} \Rightarrow x=200$$

…ya hemos resuelto esta parte del problema sustituyendo la *x* para despejar la *y*, vamos ahora a utilizar la otra posibilidad, es decir, vamos a terminar el ejercicio aplicando el método de reducción lo más exacta posible.

Para ello, vamos a volver a aplicar el método para hallar la *y* sin tener que recurrir a ninguna sustitución.
Multiplicamos la primera ecuación por *-2* y obtendremos el siguiente sistema, equivalente al inicial:

$$\begin{gathered} -2x-2y=-1200 \\ 2x-y=0 \end{gathered}$$

Si sumamos ambas ecuaciones de este sistema tendremos:

$$-3y=-1200 \Rightarrow y=\frac{1200}{3} \Rightarrow y=400$$

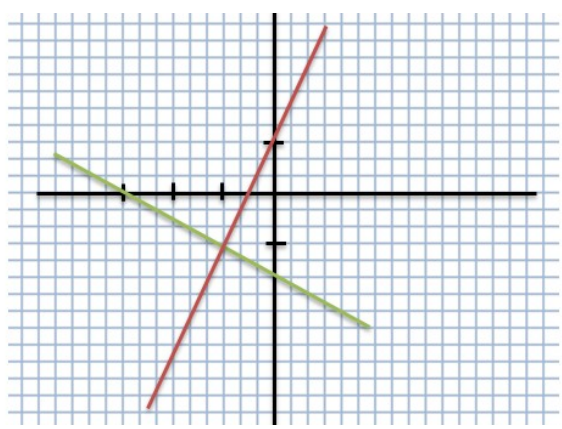
Por tanto, la solución al problema planteado es que Ana tiene Q 200.00 y Sergio tiene Q 400.00, es decir, el mismo resultado, evidentemente, que habíamos obtenido con los métodos de sustitución e igualación.

Otro ejemplo

Resolviendo el siguiente sistema y representándolo gráficamente…

$$\begin{array}{r} 2x+4y=-6 \\ -2x+\ \ y=1 \\ \hline 5y=-5 \end{array}$$

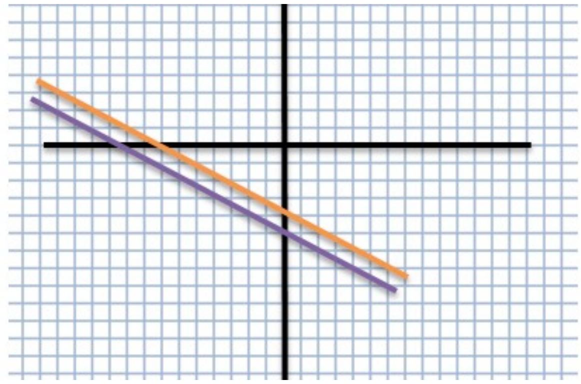
de donde y = -1 y sustituyendo x + 2(-1) = -3, x = -1. Es decir, la solución del sistema es única, x = −1, y = −1 lo que significa que el sistema es compatible y determinado, y que las rectas se cortan en un punto, precisamente el (−1, −1):


Solución del Sistema, punto (-1,-1)

Resolver e interpretar el sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y &= -3 \\ -2x - 4y &= 5 \end{aligned}\right\}$$

Por igualación: $\left.\begin{aligned} x &= -3 - 2y \\ x &= \dfrac{5+4y}{-2} \end{aligned}\right\}$ de donde:



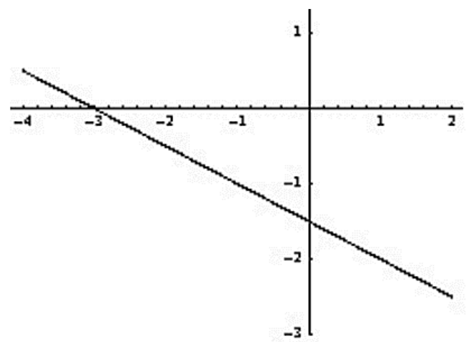
$$-3 - 2y = \frac{5+4y}{-2} \Longrightarrow 4y + 6 = 5 + 4y \Longrightarrow 0y = -1 \Longrightarrow 0 = -1$$

…lo cual es imposible y por tanto el sistema no tiene solución, es un sistema incompatible y por tanto las rectas son paralelas.

Geométricamente (observa la gráfica)…

Sistema sin solución. Rectas paralelas.

Resolver e interpretar el sistema: $\left.\begin{aligned} x + 2y &= -3 \\ 3x + 6y &= -9 \end{aligned}\right\}$



Por sustitución, como x = −2y − 3 resulta 3(−2y − 3) + 6y = −9, es decir −6y − 9+6y = −9, por tanto… 0y = 0, 0 = 0.

Como 0 = 0 es una igualdad siempre cierta, quiere decir que el sistema tiene infinitas soluciones, es compatible indeterminado, o que las rectas son la misma…

Infinitas soluciones. Las rectas coinciden.

EJERCICIO 11. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones aplicando el método indicado o determina el método que deba de emplearse para la solución de cada uno de los sistemas.

1. Método de sustitución.

$$\begin{cases} 5x + 2y = 1 \\ -3x + 3y = 5 \end{cases}$$

2. Método de reducción.

$$\begin{cases} 2x + y = 6 \\ 4x + 3y = 14 \end{cases}$$

3. Método de igualación.

$$\begin{cases} 5x - 2y = 2 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$$

4. Método de reducción.

$$\begin{cases} 5x - y = 3 \\ -2x + 4y = -12 \end{cases}$$

5. Método de sustitución.

$$\begin{cases} 3x + 5y = 15 \\ 2x - 3y = -9 \end{cases}$$

6. Método de reducción.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ -6x + 12y = 1 \end{cases}$$

7. Método de sustitución.

$$\begin{cases} 5x + 2y = 11 \\ 2x - 3y = 12 \end{cases}$$

8. Método de igualación.

$$\begin{cases} -2x + 4y = 7 \\ 3x - 5y = 4 \end{cases}$$

9. Método de igualación.

$$\begin{cases} 5x + 2y = 11 \\ 2x - 3y = 12 \end{cases}$$

10. Método de reducción.

$$\begin{cases} -2x + 4y = 7 \\ 3x - 5y = 4 \end{cases}$$

EJERCICIO 12. Determina el sistema de ecuaciones para los siguientes problemas.

PROBLEMA 01. Calcula un número sabiendo que la suma de sus dos cifras es 10; y que, si invertimos el orden de dichas cifras, el número obtenido es 36 unidades mayor que el inicial.

PROBLEMA 02. En un triángulo rectángulo, uno de sus ángulos agudos es 12° mayor que el otro. ¿Cuánto miden sus tres ángulos?

PROBLEMA 03. La distancia entre dos ciudades, A y B, es de 255 km. Un coche sale de A hacia B a una velocidad de 90 km/h. Al mismo tiempo, sale otro coche de B hacia A; a una velocidad de 80 km/h. Suponiendo su velocidad constante, calcula el tiempo que tardan en encontrarse, y la distancia que ha recorrido cada uno hasta el momento del encuentro.

PROBLEMA 04. Halla un número de dos cifras sabiendo que la primera cifra es igual a la tercera parte de la segunda; y que si invertimos el orden de sus cifras, obtenemos otro número que excede en 54 unidades al inicial.

PROBLEMA 05. La base mayor de un trapecio mide el triple que su base menor. La altura del trapecio es de 4 cm y su área es de 24 cm^2. Calcula la longitud de sus dos bases.

PROBLEMA 06. La razón entre las edades de dos personas es de 2/3. Sabiendo que se llevan 15 años, ¿cuál es la edad de cada una de ellas?

PROBLEMA 07. Un número excede en 12 unidades a otro; y si restáramos 4 unidades a cada uno de ellos, entonces el primero sería igual al doble del segundo. Plantea un sistema y resuélvelo para hallar los dos números.

PROBLEMA 08. El perímetro de un triángulo isósceles es de 19 cm. La longitud de cada uno de sus lados iguales excede en 2 cm al doble de la longitud del lado desigual. ¿Cuánto miden los lados del triángulo?

PROBLEMA 09. Pablo y Alicia llevan entre los dos 160 €. Si Alicia le da 10 € a Pablo, ambos tendrán la misma cantidad. ¿Cuánto dinero lleva cada uno?

PROBLEMA 10. La suma de las tres cifras de un número capicúa es igual a 12. La cifra de las decenas excede en 4 unidades al doble de la cifra de las centenas. Encuentra dicho número.

INFORMACIÓN (INCLUÍDA EN ESTE DOCUMENTO EDUCATIVO) TOMADA DE:

Sitios web:

1. *http://www.profesorenlinea.cl/geometria/Recta_Ecuacion_de.html*
2. *https://www.spanishged365.com/324/metodos-para-obtener-la-pendiente*
3. *http://www.vitutor.com/*
4. *http://www.aulafacil.com/cursos/l11125/ciencia/matematicas/geometria/segmento*
5. *http://www.profesorenlinea.cl/matematica/Ecuaciones_Seg_grado.html*
6. *http://www.aulafacil.com/cursos/l10880/ciencia/matematicas/ecuaciones-de-segundo-grado/sistema-de-ecuaciones-de-segundo-grado-con-dos-incognitas*
7. *http://www.aulafacil.com/cursos/l10880/ciencia/matematicas/ecuaciones-de-segundo-grado/sistema-de-ecuaciones-de-segundo-grado-con-dos-incognitas*
8. *http://www.aulafacil.com/cursos/l10881/ciencia/matematicas/ecuaciones-de-segundo-grado/ejercicios-aplicados*
9. *http://www.aulafacil.com/cursos/l10882/ciencia/matematicas/ecuaciones-de-segundo-grado/ecuaciones-bicuadras*
10. *http://sauce.pntic.mec.es/~jpeo0002/Archivos/PDF/T07.pdf*
11. *http://www.wikillerato.org/M%C3%A9todos_de_resoluci%C3%B3n_de_sistemas_de_ecuaciones_lineales.html*
12. *http://www.matematicasonline.es/cidead/libros/2Bach_Mat_II/ejercicios_resueltos/Sistemas_ecuaciones.pdf*
13. *http://thales.cica.es*
14. *http://www.vadenumeros.es/tercero/sistemas-de-ecuaciones.htm*
15. *http://www.edu.xunta.es/centros/iescastroalobrevilagarcia/system/files/Ejercicios%20de%20sistemas%20de%20ecuaciones.pdf*
16. *http://www.masmates.com/enunciados/mm0701020100.pdf*

17. *http://matematicasmodernas.com/metodo-de-igualacion/*
18. *http://matematicaactiva.obolog.es/metodo-sustitucion-2x2-1919784*
19. *http://www.aulafacil.com/cursos/l10967/ciencia/matematicas/algebra/sistemas-de-ecuaciones*
20. *http://www.edu.xunta.gal/centros/iescastroalobrevilagarcia/system/files/Ejercicios%20de%20sistemas %20de%20ecuaciones.pdf*

RESPUESTAS DE ALGUNOS EJERCICIOS:

EJERCICIO 01:

1.

$$\frac{x^3 + x}{x^4 - 1} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^3 + x}{x^4 - 1} = \frac{(x)\cancel{(x^2+1)}}{(x+1)(x-1)\cancel{(x^2+1)}} = \frac{x}{(x+1)(x-1)}$$

2.

$$\frac{m^2 - 9}{9m - m^3} \quad \Rightarrow \quad \frac{m^2 - 9}{9m - m^3} = \frac{\cancel{(m+3)}(m-3)}{m\cancel{(3+m)}(3-m)} =$$

$$\frac{-(m-3)}{-m(3-m)} = \frac{\cancel{(-m+3)}}{-m\cancel{(3-m)}} = -\frac{1}{m}$$

3.

$$\frac{ax + by}{ax^2 + bxy} \Rightarrow \frac{ax+by}{ax^2 + bxy} = \frac{\cancel{(ax+by)}}{x\,\cancel{(ax+by)}} = \frac{1}{x}$$

4.

$$\frac{x^2 - 9x}{x^3 - 6x^2 + 9x} \Rightarrow \frac{x^2 - 9x}{x^3 - 6x^2 + 9x} = \frac{\cancel{x}(x+3)\cancel{(x-3)}}{\cancel{x}\cancel{(x-3)}(x-3)} = \frac{x+3}{x-3}$$

5.

$$\frac{x^4 + 2x^3 - 3x^2}{x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 10x - 15}$$

$$\frac{x^4 + 2x^3 - 3x^2}{x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 10x - 15} = \frac{x^2(x-1)(x+3)}{(x+3)(x-1)(x^2+5)} = \frac{x^2}{x^2+5}$$

6.

$$\frac{3}{x-1} + \frac{x}{x+1} + \frac{4}{x^2+1} =$$

$$\frac{3(x+1)(x^2+1) + x(x-1)(x^2+1) + 4(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} =$$

$$\frac{3x^3 + 3x^2 + 3x + 3 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 4x^2 - 4}{(x^2-1)(x^2+1)} =$$

7.

$$\frac{x-1}{x+2} + \frac{3}{x-2} - \frac{3x+4}{(x+2)^2} =$$

$$\frac{(x-1)(x+2)(x-2) + 3(x+2)^2 - (3x+4)(x-2)}{(x+2)^2(x-2)} =$$

$$\frac{x^3 - x^2 - 4x + 4 + 3x^2 + 12x + 12 - (3x^2 - 6x + 4x - 8)}{(x+2)^2(x-2)} =$$

$$\frac{x^3 - x^2 + 10x + 24}{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}$$

8.

$$\frac{x^2-2x+3}{x-2}\cdot\frac{2x+3}{x+5}=\frac{(x^2-2x+3)(2x+3)}{(x-2)(x+5)}=$$

$$\frac{2x^3+3x^2-4x^2-6x+6x+9}{x^2+5x-2x-10}=\frac{2x^3-x^2+9}{x^2+3x-10}$$

9.

$$\frac{x+2}{x}:\left(\frac{x-1}{3}\cdot\frac{x}{2x+1}\right)=\frac{x+2}{x}:\left(\frac{(x-1)x}{3(2x+1)}\right)=$$

$$\frac{(x+2)}{x}\cdot\frac{3(2x+1)}{(x-1)x}=\frac{6x^2+15x+6}{x^3-x^2}$$

10.

$$\frac{1}{x+1}\left(x-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x+1}\left(\frac{x^2-1}{x}\right)=\frac{(x^2-1)}{(x+1)x}=\frac{\cancel{(x+1)}(x-1)}{\cancel{(x+1)}x}=\frac{x-1}{x}$$

11.

$$\left(x-\frac{4}{x}\right):(x+2)=\frac{x^2-4}{x}:\ (x+2)=\frac{(x^2-4)}{x}\cdot\frac{1}{(x+2)}=$$

$$\frac{\cancel{(x+2)}(x-2)}{x\cancel{(x+2)}}=\frac{x-2}{x}$$

EJERCICIO 10: desarrolla en hojas aparte cada uno de los siguientes ejercicios, escribe tu respuesta en el recuadro en blanco.

Problema 01. Resuelve la siguiente ecuación bicuadrada: $4x^4-37x^2+9=0$

Respuestas: $x_1=3; x_2=-3; x_3=\frac{1}{2}; x_4=-\frac{1}{2}$

Problema 02. Calcula las respuestas de *x* en la ecuación: $x^4-5x^2+4=0$

Respuestas: $x_1=2; x_2=-2; x_3=1; x_4=-1$

Problema 03. Calcula las respuestas de *x* en la ecuación: $9x^4-10x^2+1=0$

Respuestas:

$$x_1 = 1; x_2 = -1; x_3 = \frac{1}{3}; x_4 = -\frac{1}{3}$$

Problema 04. Calcula las respuestas de *x* en la ecuación: $2^{x^4-13x^2+31} = 32^{-1}$

Respuestas: $x_1 = 2; x_2 = -2; x_3 = 3; x_4 = -3$

Problema 05. Calcula el valor de *x* en la ecuación: $\frac{6}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} = 2$

Respuesta: *x=4*

EJERCICIO 11.

SISTEMA 01.

$$\left.\begin{aligned} 5x + 2y &= 1 \\ -3x + 3y &= 5 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\rightarrow y = \frac{1-5x}{2} \\ &\rightarrow -3x + 3\left(\frac{1-5x}{2}\right) = 5 \rightarrow -3x + \frac{3-15x}{2} = 5 \rightarrow -6x + 3 - 15x = 10 \rightarrow \end{aligned}$$

$$\rightarrow -21x = 7 \rightarrow x = \frac{7}{-21} = -\frac{1}{3}$$

$$y = \frac{1-5x}{2} = \frac{1+\frac{5}{3}}{2} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$\textit{Solución}: x = -\frac{1}{3} \; ; \; y = \frac{4}{3}$$

SISTEMA 02.

$$\left.\begin{aligned} 2x + y &= 6 \\ 4x + 3y &= 14 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\xrightarrow{\times(-3)} -6x - 3y = -18 \\ &\longrightarrow \underline{4x + 3y = 14} \end{aligned}$$

$$\text{Sumando: } -2x = -4 \rightarrow x = 2$$

$$2x + y = 6 \rightarrow y = 6 - 2x = 6 - 4 = 2$$

$$\textit{Solución}: x = 2 \; ; \; y = 2$$

SISTEMA 03.

$$\left.\begin{aligned} 5x - 2y &= 2 \\ x + 2y &= 2 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\rightarrow \\ &\rightarrow \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l}\rightarrow\ x=\dfrac{2+2y}{5}\\ \rightarrow\ x=2-2y\end{array}\right\}\rightarrow\ \frac{2+2y}{5}=2-2y\ \rightarrow\ 2+2y=10-10y\ \rightarrow\ 12y=8\ \rightarrow\ y=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$$

$$x=2-2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)=2-\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$$

$$\textit{Solución}:\ x=\frac{2}{3}\ ;\ y=\frac{2}{3}$$

SISTEMA 04.

$$\left.\begin{array}{r}5x-y=3\\ -2x+4y=-12\end{array}\right\}\begin{array}{l}\xrightarrow{\times 4}\ 20x-4y=12\\ \longrightarrow\ \underline{-2x+4y=-12}\end{array}$$

$$\text{Sumando: } 18x\quad=0\ \rightarrow\ x=0$$

$$5x-y=3\ \rightarrow\ 5x-3=y\ \rightarrow\ -3=y$$

$$\textit{Solución}:\ x=0\ ;\ y=-3$$

SISTEMA 05.

$$\left.\begin{array}{l}3x+5y=15\\ 2x-3y=-9\end{array}\right\}\begin{array}{l}\rightarrow\ x=\dfrac{15-5y}{3}\\ \rightarrow\ 2\left(\dfrac{15-5y}{3}\right)-3y=-9\ \rightarrow\ \dfrac{30-10y}{3}-3y=-9\ \rightarrow\ 30-10y-9y=-27\ \rightarrow\end{array}$$

$$\rightarrow\ -19y=-57\quad\rightarrow\quad y=\frac{-57}{-19}=3$$

$$x=\frac{15-5y}{3}=\frac{15-5\cdot 3}{3}=\frac{0}{3}=0$$

$$\textit{Solución}:\ x=0\ ;\ y=3$$

SISTEMA 06.

$$\left.\begin{array}{l}4x+6y=2\\ 6x+5y=1\end{array}\right\}\begin{array}{l}\xrightarrow{\times 5}\ 20x+30y=10\\ \xrightarrow{\times(-6)}\ \underline{-36x-30y=-6}\end{array}$$

$$\text{Sumando: } -16x\quad=4\ \rightarrow\ x=-\frac{4}{16}=-\frac{1}{4}$$

$$4x+6y=2\ \rightarrow\ 4\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)+6y=2\ \rightarrow\ -1+6y=2\ \rightarrow\ 6y=3\ \rightarrow\ y=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

$$\textit{Solución}:\ x=-\frac{1}{4};\ y=\frac{1}{2}$$

SISTEMA 07.

$$\left.\begin{array}{r} -2x+3y=14 \\ 3x-y=-14 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to -2x+3(3x+14)=14 \to -2x+9x+42=14 \to \\ \to y=3x+14 \end{array}$$

$$\to 7x=-28 \to x=-\frac{28}{7}=-4$$

$$y=3\cdot(-4)+14=-12+14=2$$

Solución: $x=-4$; $y=2$

SISTEMA 08.

$$\left.\begin{array}{r} 2x+3y=2 \\ -6x+12y=1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \to y=\dfrac{2-2x}{3} \\ \to y=\dfrac{1+6x}{12} \end{array}\right\} \to \frac{2-2x}{3}=\frac{1+6x}{12} \to 8-8x=1+6x \to$$

$$\to -14x=-7 \to x=\frac{-7}{-14}=\frac{1}{2}$$

$$y=\frac{2-2x}{3}=\frac{2-2\cdot(1/2)}{3}=\frac{1}{3}$$

Solución: $x=\frac{1}{2}$; $y=\frac{1}{3}$

SISTEMAS 09.

$$\left.\begin{array}{r} 5x+2y=11 \\ 2x-3y=12 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \to x=\dfrac{11-2y}{5} \\ \to x=\dfrac{12+3y}{2} \end{array}\right\} \to \frac{11-2y}{5}=\frac{12+3y}{2} \to$$

$$\to 22-4y=60+15y \to -38=19y \to y=-\frac{38}{19}=-2$$

$$x=\frac{11-2y}{5}=\frac{11-2\cdot(-2)}{5}=\frac{15}{5}=3$$

Solución: $x=3$; $y=-2$

SISTEMAS 10.

$$\left.\begin{array}{r} -2x+4y=7 \\ 3x-5y=4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{\times 3} -6x+12y=21 \\ \xrightarrow{\times 2} \underline{6x-10y=8} \end{array}$$

Sumando: $2y=29 \to y=\frac{29}{2}$

$$-2x+4y=7 \to -2x+4\cdot\left(\frac{29}{2}\right)=7 \to -2x+58=7 \to -2x=-51 \to x=\frac{51}{2}$$

Solución: $x=\frac{51}{2}$; $y=\frac{29}{2}$