CBS
Colegio Bautista Shalom

Estadística II
Quinto PAE
Tercer Bimestre

Contenidos

RECTA DE REGRESIÓN Y CORRELACIONES

- ✓ REGRESIÓN Y LÍNEAS DE REGRESIÓN.
- ✓ REGRESIÓN LINEAL.
- ✓ CORRELACIÓN.
- ✓ COEFICIENTE DE CORRELACIÓN.

DESCRIPCIÓN DE LOS DATOS

- ✓ TIPOS DE NÚMEROS ÍNDICES.
- ✓ NÚMEROS DE ÍNDICES SIMPLES.
- ✓ PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS ÍNDICES.
- ✓ NÚMEROS DE ÍNDICES COMPUESTOS.

RENTABILIDAD REAL

- ✓ LA INFLACIÓN EN LA RENTABILIDAD REAL.
- ✓ OTROS FACTORES EXTERNOS QUE PUEDEN AFECTAR A LA RENTABILIDAD REAL.
- ✓ RENTABILIDAD REAL VS RENTABILIDAD NOMINAL.
- ✓ FÓRMULA RENTABILIDAD REAL.

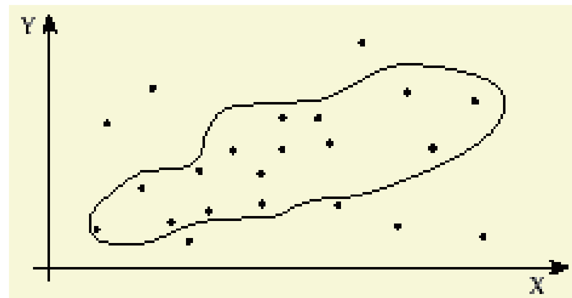
NOTA: conforme avances en tu aprendizaje, encontrarás ejercicios a resolver. Sigue las instrucciones de tu catedrático(a).

RECTA DE REGRESIÓN Y CORRELACIONES

En las distribuciones bidimensionales que siguen una dependencia estadística se utilizan gráficas de puntos para representar sus tendencias. No obstante, dichas tendencias pueden apuntar a una ley de tipo funcional, que pueda explicar el comportamiento global de la distribución. Para hallar esta ley se utilizan métodos de regresión y correlación entre las variables.

REGRESIÓN Y LÍNEAS DE REGRESIÓN

Con frecuencia, las variables que constituyen una **distribución bidimensional** muestran un cierto grado de dependencia entre ellas. Un ejemplo típico de esta relación aparece en las tablas de peso y altura de los grupos de población: aunque no existe una ley causal que relacione ambas variables, en términos estadísticos se aprecia una dependencia entre ellas (cuando aumenta la altura, suele hacerlo también el peso). Esta dependencia se refleja en la nube de puntos que representa a la distribución, de modo que los puntos de esta gráfica aparecen condensados en algunas zonas.



La concentración de puntos en algunas regiones de la nube refleja la existencia de una dependencia estadística, y la posibilidad de definir una ecuación de regresión.

En tales casos, se pretende definir una **ecuación de regresión** que sirva para relacionar las dos variables de la distribución. La representación gráfica de esta ecuación recibe el nombre de **línea de regresión**, y puede adoptar diversas formas: lineal, parabólica, cúbica, hiperbólica, exponencial, etc.

REGRESIÓN LINEAL

Cuando la línea de regresión se asemeja a una recta (**regresión lineal**), puede ajustarse a esta forma geométrica por medio de un método general conocido como método de los **mínimos cuadrados**. La recta de ajuste tendrá por ecuación y = ax + b, donde los coeficientes a y b se calculan teniendo en cuenta que:

- La recta debe pasar por el punto ($\overline{x}, \overline{y}$).
- La separación de los puntos de la gráfica de dispersión con respecto a la recta de regresión debe ser mínima.

Estas dos condiciones conducen a una recta de ajuste expresada por la ecuación:

Recta de regresión de Y sobre X:

- ✓ La recta de regresión de Y sobre X se utiliza para estimar los valores de la Y a partir de los de la X.
- ✓ La **pendiente** de la recta es el cociente entre la covarianza y la varianza de la variable X.

$$y - \overline{y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x - \overline{x})$$

Recta de regresión de X sobre Y:

- ✓ La **recta de regresión** de X sobre Y se utiliza para estimar los valores de la X a partir de los de la Y.
- ✓ La **pendiente** de la recta es el cociente entre la covarianza y la varianza de la variable Y.

$$x - \overline{x} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}(y - \overline{y})$$

Si la correlación es nula, r = 0, las rectas de regresión son perpendiculares entre sí, y sus ecuaciones son:

$$y = \overline{y} \qquad x = \overline{x}$$

donde $\overline{x}$ es la **media aritmética** de la primera variable, $\overline{y}$ la media aritmética de la segunda variable, $\mathbf{s_x}$ **la desviación típica** de la primera variable y $\mathbf{s_{xy}}$ un valor denominado **covarianza**, que se define por la expresión:

$$\sigma_{xy} = \frac{\sum x_i y_i}{n} - \overline{x} \cdot \overline{y}$$

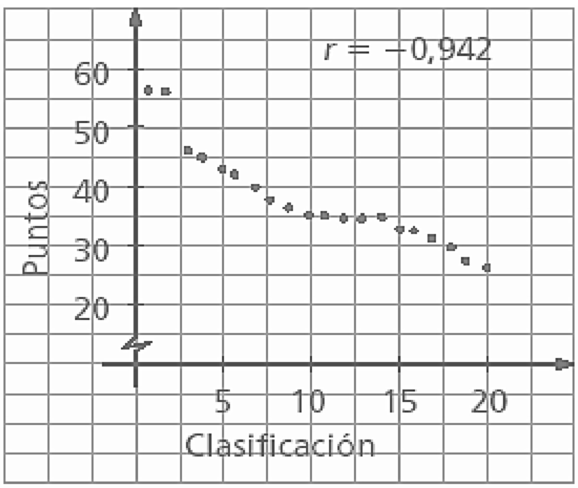
CORRELACIÓN

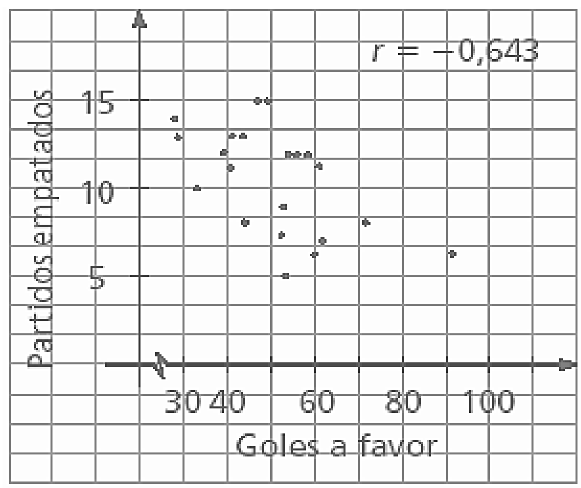
En una distribución bidimensional, se define **correlación**, denotada por r, como el grado de dependencia que existe entre las dos variables del modelo, de modo que:

- Cuando al aumentar el valor de una variable crece también el de la otra, la correlación es directa, e inversa en caso contrario.
- Si no existe dependencia entre las variables, la correlación es nula.

Para conocer si una correlación es directa o inversa, basta con determinar su covarianza:

- Si la covarianza es positiva, la correlación es directa.
- Cuando la covarianza es negativa, existe una correlación inversa entre las variables.





COEFICIENTE DE CORRELACIÓN

La medida exacta del grado de dependencia entre las dos variables de una distribución bidimensional se obtiene por medio del denominado **coeficiente de correlación**. Este parámetro se define como el cociente entre la covarianza de la distribución y el producto de las desviaciones típicas de cada una de las variables.

Es decir:

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

- Si r = +1, la correlación es máxima directa. Cuando r = -1, la correlación es máxima inversa. En ambos casos, existe entre las variables una **dependencia funcional** (todos los puntos están situados sobre la recta de regresión).
- Si -0,5 £ r £ +0,5, se dice que entre las variables existe una dependencia baja.

EJERCICIO 01 (PRACTICANDO):

Cinco niños de 2, 3, 5, 7 y 8 años pesan, respectivamente, 14, 20, 32, 42 y 44 kilos.

1. Hallar la ecuación de la recta de regresión de la edad sobre el peso.
2. ¿Cuál sería el peso aproximado de un niño de seis años?

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i \cdot y_i$
2	14	4	196	28
3	20	9	400	60
5	32	25	1 024	160
7	42	49	1 764	294
8	44	64	1 936	352
25	152	151	5 320	894

$$\bar{x} = \frac{25}{5} = 5 \qquad \bar{y} = \frac{152}{5} = 30.4$$

$$\sigma_x^2 = \frac{151}{5} - 5^2 = 5.2 \qquad \sigma_y^2 = \frac{5320}{5} - 30.4^2 = 139.84$$

$$\sigma_{xy} = \frac{894}{5} - 5 \cdot 30.4 = 26.8$$

$$x - 5 = 0.192\,(y - 30) \qquad x = 0.192y - 0.76$$

$$y - 30.4 = 5.15\,(x - 5) \qquad y = 5.15x + 4.65$$

$$y = 5.15 \cdot 6 + 4.65 = 35.55 \text{ Kg}$$

Un centro comercial sabe en función de la distancia, en kilómetros, a la que se sitúe de un núcleo de población, acuden los clientes, en cientos, que figuran en la tabla:

Nº de Clientes (X)	Distancia (Y)
8	15
7	19
6	25
4	23
2	34
1	40

1. Calcular el coeficiente de **correlación lineal**.
2. Si el centro comercial se sitúa a 2 km, ¿cuántos clientes puede esperar?
3. Si desea recibir a 5 clientes, ¿a qué distancia del núcleo de población debe situarse?

x_i	y_i	$x_i \cdot y_i$	x_i^2	y_i^2
8	15	120	64	225
7	19	133	49	361
6	25	150	36	625
4	23	92	16	529
2	34	68	4	1 156
1	40	40	1	1 600
28	156	603	170	4 496

$$\bar{x} = \frac{28}{6} = 4.67 \qquad \bar{y} = \frac{156}{6} = 26$$

$$\sigma_x^2 = \frac{170}{6} - 4.67^2 = 6.53 \qquad \sigma_y^2 = \frac{4496}{6} - 26^2 = 73.33$$

$$\sigma_x = \sqrt{6.53} = 2.55 \qquad \sigma_y = \sqrt{73.33} = 8.56$$

$$\sigma_{xy} = \frac{603}{6} - 4.677 \cdot 26 = -20.92 \qquad r = \frac{-20.92}{2.55 \cdot 8.56} = -0.96$$

Correlación negativa muy fuerte.

$$x - 4.67 = \frac{-20.92}{73.33}(y - 26) \qquad x = -0.29y + 12.09$$

$$x = -0.29 \cdot 2 + 12.09 = 11.51 \simeq 12 \text{ clientes}$$

$$y - 26 = \frac{-20.92}{6.53}(x - 4.67) \qquad y = -3.2x + 40.96$$

$$y = -3.2 \cdot 5 + 40.96 = 24.96 \text{ km}$$

EJERCICIO 02: desarrolla y resuelve los siguientes problemas.

PROBLEMA 01. Las notas obtenidas por cinco alumnos en Matemáticas y Química son:

Matemáticas	Química
6	**6. 5**
4	**4. 5**
8	**7**
5	**5**
3. 5	**4**

Determinar las **rectas de regresión** y calcular la nota esperada en Química para un alumno que tiene 7.5 en Matemáticas.

PROBLEMA 02. Un conjunto de datos bidimensionales (X, Y) tiene **coeficiente de correlación** r = -0.9, siendo las medias de las distribuciones marginales $\bar{x}$ = 1, $\bar{y}$ = 2. Se sabe que una de las cuatro ecuaciones siguientes corresponde a la **recta de regresión** de Y sobre X:

y = -x + 2   3x - y = 1   2x + y = 4 y = x + 1

Seleccionar razonadamente esta **recta**.

PROBLEMA 03. Las estaturas y pesos de 10 jugadores de baloncesto de un equipo son:

Estatura (X)	Peso (Y)
186	85
189	85
190	86

192	90
193	87
193	91
198	93
201	103
203	100
205	101

Calcular:

1. La **recta de regresión** de Y sobre X.
2. El **coeficiente de correlación**.
3. El peso estimado de un jugador que mide 208 cm.

PROBLEMA 04:

A partir de los siguientes datos referentes a horas trabajadas en un taller (X), y a unidades producidas (Y), determinar la **recta de regresión** de Y sobre X, el **coeficiente de correlación lineal** e interpretarlo.

Horas (X)	Producción (Y)
80	300
79	302
83	315
84	330
78	300
60	250
82	300
85	340
79	315
84	330
80	310
62	240

PROBLEMA 05. Se ha solicitado a un grupo de 50 individuos información sobre el número de horas que dedican diariamente a dormir y ver la televisión. La clasificación de las respuestas ha permitido elaborar la siente tabla:

x	6	7	8	9	10
y	4	3	3	2	1
(f_i)	3	16	20	10	1

Se pide:

1. Calcular el **coeficiente de correlación**.
2. Determinar la ecuación de la **recta de regresión** de Y sobre X.
3. Si una persona duerme ocho horas y media, ¿cuánto cabe esperar que vea la televisión?

PROBLEMA 06. La tabla siguiente nos da las notas del test de aptitud (X) dadas a seis dependientes a prueba y ventas del primer mes de prueba (Y) en cientos de euros.

X	25	42	33	54	29	36
Y	42	72	50	90	45	48

1. Hallar el **coeficiente de correlación** e interpretar el resultado obtenido.
2. Calcular la **recta de regresión** de Y sobre X. Predecir las ventas de un vendedor que obtenga 47 en el test.

PROBLEMA 07. Una compañía desea hacer predicciones del valor anual de sus ventas totales en cierto país a partir de la relación de éstas y la renta nacional. Para investigar la relación cuenta con los siguientes datos:

X	Y
189	402
190	404
208	412
227	425
239	429
252	436
257	440
274	447
293	458
308	469
316	469

"X" representa la renta nacional en millones de euros e "Y" representa las ventas de la compañía en miles de euros en el periodo que va desde 1990 hasta 2000 (ambos inclusive).

Calcular:

1. La **recta de regresión** de Y sobre X.
2. El **coeficiente de correlación lineal** e interpretarlo.
3. Si en 2001 la renta nacional del país fue de 325 millones de euros. ¿Cuál será la predicción para las ventas de la compañía en este año?

PROBLEMA 08. La información estadística obtenida de una muestra de tamaño 12 sobre la relación existente entre la inversión realizada y el rendimiento obtenido en cientos de miles de euros para explotaciones agrícolas, se muestra en el siguiente cuadro:

Inversión (X)	Rendimiento (Y)
11	2
14	3
16	5
15	6
16	5
18	3
20	7
21	10
14	6
20	10

19	5
11	6

Calcular:

1. La **recta de regresión** del rendimiento respecto de la inversión.
2. La previsión de inversión que se obtendrá con un rendimiento de 1 250 000 €.

PROBLEMA 09. El número de horas dedicadas al estudio de una asignatura y la calificación obtenida en el examen correspondiente, de ocho personas es:

Horas (X)	Calificación (Y)
20	6.5
16	6
34	8.5
23	7
27	9
32	9.5
18	7.5
22	8

Se pide:

1. Recta de regresión de Y sobre X.
2. Calificación estimada para una persona que hubiese estudiado 28 horas.

PROBLEMA 10. En la tabla siguiente se indica la edad (en años) y la conducta agresiva (medida en una escala de cero a 10) de 10 niños.

Edad	Conducta Agresiva
6	9
6	6
6.7	7
7	8
7.4	7
7.9	4
8	2
8.2	3
8.5	3
8.9	1

1. Obtener la **recta de regresión** de la conducta agresiva en función de la edad.
2. A partir de dicha recta, obtener el valor de la conducta agresiva que correspondería a un niño de 7.2 años.

PROBLEMA 11. Los valores de dos variables X e Y se distribuyen según la tabla siguiente:

Y/X	100	50	25
14	1	1	0

18	2	3	0
22	0	1	2

Se pide:

1. Calcular la **covarianza**.
2. Obtener e interpretar el coeficiente de **correlación lineal**.
3. Ecuación de la **recta de regresión** de Y sobre X.

PROBLEMA 12. Las puntuaciones obtenidas por un grupo de alumnos en una batería de test que mide la habilidad verbal (X) y el razonamiento abstracto (Y) son las siguientes:

22>Y/X	22>20	22>30	22>40	22>50
22>(25-35)	6	4	0	0
22>(35-45)	3	6	1	0
22>(45-55)	0	2	5	3
22>(55-65)	0	1	2	7

Se pide:

1. ¿Existe correlación entre ambas variables?
2. Según los datos de la tabla, si uno de estos alumnos obtiene una puntuación de 70 puntos en razonamiento abstracto, ¿en cuánto se estimará su habilidad verbal?

PROBLEMA 13. Se sabe que entre el consumo de papel y el número de litros de agua por metro cuadrado que se recogen en una ciudad no existe relación.

1. ¿Cuál es el valor de la **covarianza** de estas variables?
2. ¿Cuánto vale el coeficiente de **correlación lineal**?
3. ¿Qué ecuaciones tienen las dos **rectas de regresión** y cuál es su posición en el plano?

PROBLEMA 14. En una empresa de transportes trabajan cuatro conductores. Los años de antigüedad de permisos de conducir y el número de infracciones cometidas en el último año por cada uno de ellos son los siguientes:

Años (X)	3	4	5	6
Infracciones (Y)	4	3	2	1

Calcular el **coeficiente de correlación lineal** e interpretarlo.

PROBLEMA 15. Una persona rellena semanalmente una quiniela y un boleto de lotería primitiva anotando el número de aciertos que tiene. Durante las cuatro semanas del mes de febrero, los aciertos fueron:

Quiniela (X)	6	8	6	8
Primitiva (Y)	1	2	2	1

Obtener el **coeficiente de correlación lineal** e interpretarlo. ¿Ofrecerían confianza las previsiones hechas con las rectas de regresión?

DESCRIPCIÓN DE LOS DATOS

En general, las magnitudes socioeconómicas varían en el tiempo y en el espacio. Con frecuencia estaremos interesados en hacer comparaciones de dichas magnitudes en dos o más periodos de tiempo o en dos o más zonas geográficas. Por ejemplo, analizar la evolución del PIB español en los últimos años, comparar el PIB de los países europeos o, lo que es de más interés, estudiar la evolución de los precios de los productos de consumo a lo largo del tiempo o comparar el nivel de desarrollo de los países del mundo.

Un número índice, $I_{t/0}$, es una medida estadística que recoge la evolución relativa en el periodo t de una magnitud económica (precios, producciones, …) de un conjunto de bienes o productos respecto de un periodo base o de referencia 0. También permite comparar una magnitud económica en una zona geográfica respecto de una zona de referencia. Por tanto, permiten comparar el estado de un fenómeno económico (precios, producción, ...) en dos situaciones y es una herramienta imprescindible en los estudios de coyuntura. Utilizaremos la notación de los índices temporales, cuyo uso es más habitual que los espaciales, si bien los desarrollos se pueden generalizar en gran medida a estos últimos.

- ✓ Período base o de referencia: período de tiempo fijado arbitrariamente que se toma como origen de las comparaciones.
- ✓ Período actual o corriente: período de tiempo que se compara con el período base.

TIPOS DE NÚMEROS ÍNDICES

Según que recojan la evolución de una o más magnitudes:

- ✓ Índices simples: recogen la evolución del precio, la cantidad o el valor de un único bien o producto.
- ✓ Índices compuestos, complejos o sintéticos: recogen la evolución conjunta de los precios, las cantidades o los valores de *k* bienes o productos. A su vez, los índices complejos se clasifican como:
  - Sin ponderar: todas las magnitudes o componentes tiene la misma importancia, es decir, los mismos pesos. Los *k* bienes o productos se consideran con el mismo peso.
  - Ponderados: cada magnitud o componente tiene un peso diferente asignado en función de diversos criterios. Los *k*bienes o productos se consideran con distinto peso, peso que recoge la importancia relativa de cada uno de los bienes.

Números índices.	Simples.		
	Compuestos o complejos.	Sin ponderar.	Sauerbeck, Brandstreet-Dûtot, …
		Ponderados.	Laspeyres, Paasche, Edgeworth, Fisher, …

Según el tipo de magnitud:

- ✓ Índices de precios: estudian la evolución de los precios de un bien o de un conjunto de bienes.
- ✓ Índices de cantidades: estudian la evolución de la cantidad producida o consumida de un bien o de un conjunto de bienes.
- ✓ Índices de valores: estudian la evolución del valor de un bien o de un conjunto de bienes.

Números índices:	Precios.
	Cantidades.
	Valores.

NÚMEROS DE ÍNDICES SIMPLES

Un índice simple es el cociente entre la magnitud en el período corriente y la magnitud en el período base. Generalmente se multiplica por cien y se lee en porcentaje. No presentan gran utilidad en sí mismos y su interés radica en que son el punto de partida de la construcción de los índices complejos y en que algunas de sus propiedades sirven para evaluar la bondad de éstos. Consideremos la magnitud *X* en distintos períodos de tiempo.

El índice simple de la magnitud *X* en el período *t* con respecto al período 0 será:

$$I_{t/0} = \frac{x_t}{x_0}$$

que se interpreta como la variación, en tanto por uno, experimentada por la magnitud *X* entre el periodo 0 y el periodo *t*. Habitualmente el índice se expresa en tanto por ciento, esto es,

$$I_{t/0} = \frac{x_t}{x_0} \cdot 100$$

interpretándose como la variación, en tanto por ciento, experimentada por la magnitud *X* entre el periodo 0 y el periodo *t*. Con todo, en los desarrollos y propiedades de los números índices ha de considerarse la primera de las expresiones.

Los índices simples pueden recoger la evolución de los precios de un bien, de su producción (cantidad) o de sus valores. En la **hoja adjunta** se ilustra el concepto construyendo el índice del precio del trigo.

PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS ÍNDICES

Las siguientes propiedades las cumplen los índices simples y, aunque sería deseable, no siempre las cumplen los índices complejos.

1. Existencia: todo número índice ha de existir, ser finito y distinto de cero.

2. Identidad: si el período base y el actual coinciden, el índice vale la unidad.

$$I_{t/t} = \frac{x_t}{x_t} = 1$$

3. Circular: sean los períodos 0, *t* y *t'*,

$$I_{t'/0} = \frac{x_{t'}}{x_0} = \frac{x_{t'}}{x_t} \cdot \frac{x_t}{x_0} = I_{t'/t} \cdot I_{t/0} \quad \Rightarrow \quad I_{t'/t} = \frac{I_{t'/0}}{I_{t/0}}$$

Esta propiedad jugará un importante papel para enlazar índices tras hacer un cambio de base.

4. Inversión: el índice con los periodos invertidos resulta la inversa del índice.

$$I_{t/0} = \frac{x_t}{x_0} = \frac{1}{\frac{x_0}{x_t}} = \frac{1}{I_{0/t}} \quad \Rightarrow \quad I_{t/0} \cdot I_{0/t} = I_{t/t} = 1$$

5. Encadenamiento: es una generalización de la propiedad circular.

$$I_{t/0} = I_{t/t-1} \cdot I_{t-1/t-2} \cdots I_{2/1} \cdot I_{1/0}$$

6. Proporcionalidad: si en el período actual todas las magnitudes sufren una variación proporcional, esto es, $x_{t'} = x_t + k \cdot x_t = (1+k) \cdot x_t$, el número índice queda afectado en la misma proporción.

$$I_{t'/0} = \frac{x_{t'}}{x_0} = \frac{x_t + k \cdot x_t}{x_0} = \frac{x_t}{x_0} + k\,\frac{x_t}{x_0} = I_{t/0} + k\,I_{t/0} = (1+k)\,I_{t/0}$$

7. Homogeneidad: el número índice no debe quedar afectado por un cambio en las unidades de medida.

8. Adición: el índice de una suma de magnitudes es la media ponderada de los índices simples.

$$I_{t/0}(x+y) = \frac{x_t + y_t}{x_0 + y_0} = \frac{x_t \cdot \frac{x_0}{x_0} + y_t \cdot \frac{y_0}{y_0}}{x_0 + y_0} = \frac{I_{t/0}(x) \cdot x_0 + I_{t/0}(y) \cdot y_0}{x_0 + y_0} = I_{t/0}(x) \cdot \frac{x_0}{x_0 + y_0} + I_{t/0}(y) \cdot \frac{y_0}{x_0 + y_0}$$

9. Multiplicación: el índice de un producto de magnitudes es el producto de los índices simples.

$$I_{t/0}(x \cdot y) = \frac{x_t \cdot y_t}{x_0 \cdot y_0} = I_{t/0}(x) \cdot I_{t/0}(y)$$

NÚMEROS DE ÍNDICES COMPUESTOS

Frecuentemente, el interés no está en comparar precios, cantidades o valores de un único bien, sino en conocer la evolución conjunta de esas magnitudes para un grupo más o menos numeroso de bienes. Para ello, trataremos de resumir la información suministrada por los índices simples en un único índice que denominaremos compuesto, complejo o sintético. Nuestro propósito es obtener un número índice sencillo pero que reúna la mayor cantidad de información posible. Según que prime la sencillez o la conservación de la máxima información tendremos dos tipos de índices complejos: sin ponderar y ponderados.

Sea la magnitud *X* (precios, cantidades, valores, ...) relativa a *k* bienes, $X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_k$. Los valores de la magnitud para los distintos bienes en los distintos períodos de tiempo se recogen en la siguiente tabla:

Periodos	X_1	...	X_i	...	X_k
0	x_{10}	...	x_{i0}	...	x_{k0}
1	x_{11}	...	x_{i1}	...	x_{k1}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
t	x_{1t}	...	x_{it}	...	x_{kt}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
T	x_{1T}	...	x_{iT}	...	x_{kT}

A partir de los índices simples de *X* para cada uno de los bienes,

$$I_{t/0}(X_1) = \frac{x_{1t}}{x_{10}} \ldots\ldots I_{t/0}(X_i) = \frac{x_{it}}{x_{i0}} \ldots\ldots I_{t/0}(X_k) = \frac{x_{kt}}{x_{k0}}$$

podremos obtener un índice complejo para *X* utilizando un promedio, índice complejo que resume la información proporcionada por los índices simples. Los más habituales son los que se obtienen a partir de medias aritméticas o medias agregativas. También se pueden aplicar medias geométricas o medias armónicas.

<u>Índices complejos sin ponderar</u>. Todos los índices simples, y por tanto todas las componentes, tienen el mismo peso.

Media aritmética:

$$I_{t/0}(X) = \frac{I_{t/0}(X_1) + \cdots + I_{t/0}(X_i) + \cdots + I_{t/0}(X_k)}{k} = \frac{\sum_{i=1}^{k} I_{t/0}(X_i)}{k}$$

Media agregativa:

$$I_{t/0}(X) = \frac{x_{1t} + \cdots + x_{it} + \cdots + x_{kt}}{x_{10} + \cdots + x_{i0} + \cdots + x_{k0}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_{it}}{\sum_{i=1}^{k} x_{i0}}$$

El problema de la media agregativa es que exige que las componentes sean agregables.
Índices complejos ponderados. En este caso, los índices simples tienen distinto peso, es decir, se asignan diferentes ponderaciones a las componentes o magnitudes. Sean estos pesos $\omega_1, \ldots, \omega_i, \ldots, \omega_k$.

Media aritmética:

$$I_{t/0}(X) = \frac{I_{t/0}(X_1)\,\omega_1 + \cdots + I_{t/0}(X_i)\,\omega_i + \cdots + I_{t/0}(X_k)\,\omega_k}{\omega_1 + \cdots + \omega_i + \cdots + \omega_k} = \frac{\sum_{i=1}^{k} I_{t/0}(X_i)\,\omega_i}{\sum_{i=1}^{k} \omega_i}$$

Los índices complejos de media aritmética sin ponderar se pueden considerar un caso particular de éste, cuando todas las ponderaciones son iguales a 1.

Media agregativa:

$$I_{t/0}(X) = \frac{X_{1t}\,\omega_1 + \cdots + X_{it}\,\omega_i + \cdots + X_{kt}\,\omega_k}{X_{10}\,\omega_1 + \cdots + X_{i0}\,\omega_i + \cdots + X_{k0}\,\omega_k} = \frac{\sum_{i=1}^{k} X_{it}\,\omega_i}{\sum_{i=1}^{k} X_{i0}\,\omega_i}$$

Los índices complejos de media agregativa sin ponderar se pueden considerar un caso particular de éste, cuando todas las ponderaciones son iguales a 1. Además, las medias agregativas se pueden expresar como medias aritméticas ponderadas. Así, para la media agregativa sin ponderar resulta

$$I_{t/0}(X) = \frac{I_{t/0}(X_1)X_{10} + \cdots + I_{t/0}(X_i)X_{i0} + \cdots + I_{t/0}(X_k)X_{k0}}{X_{10} + \cdots + X_{i0} + \cdots + X_{k0}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} I_{t/0}(X_i)X_{i0}}{\sum_{i=1}^{k} X_{i0}}$$

y para la media agregativa ponderada

$$I_{t/0}(X) = \frac{I_{t/0}(X_1)X_{10}\,\omega_1 + \cdots + I_{t/0}(X_i)X_{i0}\,\omega_i + \cdots + I_{t/0}(X_k)X_{k0}\,\omega_k}{X_{10}\,\omega_1 + \cdots + X_{i0}\,\omega_i + \cdots + X_{k0}\,\omega_k} = \frac{\sum_{i=1}^{k} I_{t/0}(X_i)X_{i0}\,\omega_i}{\sum_{i=1}^{k} X_{i0}\,\omega_i}$$

Por tanto, la media aritmética ponderada de los índices simples es la forma más general de agregar índices simples para obtener un índice complejo:

$$I_{t/0}(X) = \frac{I_{t/0}(X_1)\,\omega_1 + \cdots + I_{t/0}(X_i)\,\omega_i + \cdots + I_{t/0}(X_k)\,\omega_k}{\omega_1 + \cdots + \omega_i + \cdots + \omega_k} = I_{t/0}(X_1)\cdot W_1 + \cdots + I_{t/0}(X_i)\cdot W_i + \cdots + I_{t/0}(X_k)\cdot W_k$$

donde W_i son las ponderaciones normalizadas,

$$W_i = \frac{\omega_i}{\sum_{i=1}^{k} \omega_i} \qquad \left(\sum_{i=1}^{k} W_i = 1\right)$$

Habitualmente estas ponderaciones se expresan en tanto por ciento o en tanto por mil.

EJERCICIO 03: desarrolla y resuelve los siguientes problemas.

PROBLEMA 01. La tabla siguiente recoge los precios y el consumo de tres artículos básicos en los años 1991 y 1992:

Artículo	Unidades	Precio promedio		Consumo promedio	
		1991	1992	1991	1992
Leche	Litro	75	80	10	11
Pan	Barra	50	60	9	8
Huevos	Docena	225	200	1	1.2

a) Hallar los índices de precios de Laspeyres y Paasche para el conjunto de artículos utilizando como año base 1991.

b) El consumo de mantequilla de una familia fue de 1500 pts. en 1991 y de 1950 en 1992. Hallar el incremento real, en porcentaje, del consumo de mantequilla, utilizando el índice más apropiado de los calculados.

PROBLEMA 02. El cuadro siguiente muestra el precio y la estructura del gasto efectuado en gasolina y gasoil durante un periodo de siete años:

	Gasolina		Gasoil	
Años	Precio	Gasto (%)	Precio	Gasto (%)
1980	50	70%	40	30%
1981	55	72%	42	28%
1982	58	74%	45	26%
1983	60	75%	48	25%
1984	65	75%	50	25%
1985	65	78%	55	22%
1986	70	80%	60	20%

a) Hallar los índices de precios de Laspeyres y Paasche con base 1980 y 1984.

b) Una empresa que comercializa un combustible mezcla ha alcanzado durante dicho periodo las siguientes cifras de ventas, en miles de pesetas:

Años	1980 1981 1982 1983 1984 1985 1986
Ventas	4200 0 5300 5800 6100 6300 6700

Estudiar la variación porcentual real de las ventas de dicho combustible.

c) Plantearse los apartados a y b si sólo se conoce el gasto efectuado en el año 80.

PROBLEMA 03. La siguiente tabla recoge el índice de precios de consumo en los meses de enero y diciembre de 1991 para cada uno de los grupos que constituyen la cesta de la compra:

Grupo	Alimentación	Vestido	Vivienda	Menaje	Medicina	Transporte	Cultura	Otros
Ponderación	33,0%	8,7%	18,6%	7,4%	2,4%	14,4%	7,0%	8,5%
Enero	175,4	179,7	163,0	160,4	167,9	161,1	161,0	192,7
Diciembre	181,1	188,4	170,6	167,3	178,2	166,5	171,0	205,3

Obtener el índice general de precios de consumo para enero y diciembre.

PROBLEMA 04. La tabla siguiente recoge el Índice de Precios de Consumo (base 1992) del año 2000 (en España) para cada uno de los 12 grupos en que se encuentra dividido el gasto según la COICOP (Classification Of Individual Consumption by Purpose) y sus correspondientes ponderaciones:

Grupo	**IPC**	**Ponderación**
Alimentos y bebidas no alcohólicas	120.6	215
Bebidas alcohólicas y tabaco	176.4	32
Vestido y calzado	122.4	100
Vivienda	137.6	115
Menaje	124.3	64
Medicina	127.6	29
Transporte	138.9	157
Comunicaciones	122.6	25
Ocio y cultura	126.9	65
Enseñanza	165.8	17
Hoteles, cafés y restaurantes	139.6	113
Otros	137.2	68
TOTAL		1000

a) Calcular e interpretar el IPC general para el año 2000. Sabiendo que el IPC en 1999 fue 126.65, ¿cuál ha sido la tasa de variación de los precios entre los dos años?
b) Si en 1999 el salario mensual de una persona era de 280.000 pesetas, ¿cuánto tendría que ganar en 2000 para no perder poder adquisitivo?
c) Si, como propone la ministra de Sanidad, excluimos del IPC las Bebidas alcohólicas y tabaco, ¿cuál sería el IPC para el año 2000?

PROBLEMA 05:

A partir de la Contabilidad Regional de España. Base 86 se ha obtenido el consumo final, en miles de millones de euros, de los hogares de la Provincia 1 y Provincia 2 en los últimos seis años: (tabla en la siguiente página).

Años	1990	1991	1992	1993	1994	1995
Euros. corrientes	2043.9	2161.2	2325.6	2388.0	2521.3	2670.9
Euros. constantes	2283.7	2279.7	2325.6	2274.3	2292.1	2320.5

a) Obtener el deflacionador implícito.
b) ¿Qué variación, en términos reales, ha experimentado el consumo final de los hogares de la comunidad a lo largo del periodo considerado?

RENTABILIDAD REAL

La rentabilidad real es un concepto muy importante para saber cuándo se quiere comenzar a invertir. Antes de comenzar a saber qué es la rentabilidad real hay que tener en cuenta qué es la inflación y cómo va a afectar a una inversión, así como otros factores externos que pueden afectar a la rentabilidad obtenida por un determinado producto financiero. Por lo tanto, habrá que restarle al interés, la inflación, para conocer la rentabilidad real de una inversión, sobre todo en los casos de rentas fijas y especialmente las que son a largo plazo.

LA INFLACIÓN EN LA RENTABILIDAD REAL

La inflación es el aumento continuado de los precios al consumo en un momento dado respecto al momento anterior. La inflación se mide a través del IPC, que es aumento de precio de "la cesta de la compra" de un conjunto se bienes y servicios básicos.

La inflación es el factor por excelencia que puede afectar a la rentabilidad obtenida por un bien.

La inflación es un factor externo que afecta a los precios. Esto significa que si un bien hoy cuesta 100€, se verá afectado por la inflación o la deflación con el paso del tiempo, por tanto, ese precio del bien se verá aumentado (o disminuido en el caso de la deflación).

Actualmente, nos encontramos en un momento en que la inflación está creciendo muy poco, e incluso ha llegado a decrecer. Por ello, aunque la rentabilidad de una inversión haya sido pequeña, el hecho de que la inflación no se haya elevado en exceso hace que la rentabilidad real se haya podido mantener o no bajar mucho.

OTROS FACTORES EXTERNOS QUE PUEDEN AFECTAR A LA RENTABILIDAD REAL

Otro factor externo que puede afectar a la rentabilidad real son los impuestos, especialmente el IRPF en el caso de las personas físicas y el Impuesto de Sociedades en el de las empresas. Por tanto, en la rentabilidad real se tienen en cuenta factores externos que afectan a la rentabilidad que obtiene.

RENTABILIDAD REAL VS RENTABILIDAD NOMINAL

En el caso de la rentabilidad real, hemos dicho que se tienen en cuenta factores externos como la inflación o los impuestos para calcularla. En cambio, para calcularla rentabilidad nominal no se tienen en cuenta factores externos. Por tanto, será un cálculo simple donde se debe dividir el beneficio obtenido entre el capital invertido x 100 para obtenerlo en forma de porcentaje.

Ejemplo:

Para obtener la rentabilidad real debemos calcular antes la rentabilidad nominal.

La fórmula de la rentabilidad real será:

$$(1 + \mathit{Rentabilidad\ nominal}) = (1 + \mathit{Rentabilidad\ real})\ x\ (1 + \mathit{Inflación})$$

Por tanto, se debe conocer el dato de la inflación para poder calcular la rentabilidad real.

Pongamos un ejemplo:

Si invertimos 2.000€ y dentro de un año obtenemos 300€, habremos obtenido la siguiente rentabilidad nominal:

$$\frac{300}{2.000 \times 100} = 15\%\ \mathit{de\ rentabilidad\ nominal\ anual}$$

Con una inflación del 7% la rentabilidad real será la siguiente:

$$(1 + 0{,}15) = (1 + \mathit{Rentabilidad\ real})\ x\ (1 + 0{,}07) =$$

Quedando al despejar la rentabilidad real, la siguiente fórmula:

$$(1{,}15\ /\ 1{,}07) - 1 = 7{,}5\%\ \mathit{de\ rentabilidad\ real\ en\ lugar\ de\ un}\ 15\%$$

FÓRMULA RENTABILIDAD REAL

$$\mathit{Rentabilidad\ Nominal} = \left(\frac{\mathit{Valor\ Final\ \$} - \mathit{Valor\ Inicial\ \$}}{\mathit{Valor\ Inicial\ \$}}\right) x\ 100$$

Rentabilidad Nominal= Rentabilidad Real + Variación UF (IPC)

$$\mathit{Rentabilidad\ Nominal} = (1 + \mathit{Rentabilidad\ Real}) x\ (1 + \mathit{Variación\ UF})$$

El cálculo exacto de la rentabilidad se hace con las siguientes fórmulas:

$$\mathit{Rentabilidad\ Real} = \left(\frac{\mathit{Valor\ Final\ UF} - \mathit{Valor\ Inicial\ UF}}{\mathit{Valor\ Inicial\ UF}}\right) x\ 100$$

$$\mathit{Rentabilidad\ Real} = \left(\left(\frac{1 + \mathit{Rentabilidad\ nominal}}{1 + \mathit{Variación\ UF}}\right) - 1\right) x100$$

EJERCICIO 04. Desarrollar y resolver los siguientes problemas.

PROBLEMA 01. Si un inversionista invierte $1.500.000 en una acción y recibe un mes después $1.590.000. ¿Qué rentabilidad nominal tuvo?

PROBLEMA 02. Calcula la rentabilidad real y nominal en base a los siguientes datos:

Inversión inicial	: $4.000.000
Rescate inversión	: $4.300.000
UF Inicial	: 21.000
UF Final	: 21.840

PROBLEMA 03. Calcula la rentabilidad real y nominal en base a los siguientes datos:

Inversión inicial	: $12.000.000
Rescate inversión	: $12.048.000
UF Inicial	: 21.500
UF Final	: 21.715

PROBLEMA 04. Calcula la rentabilidad real y nominal en base a los siguientes datos que un inversionista suyo le entregó.

Inversión inicial	: $5.000.000
Rescate inversión	: $5.300.000
UF Inicial	: 22.500
UF Final	: 20.450

PROBLEMA 05. Un inversionista puso una inversión en acciones por $5.000.000 y las vendió en $5.500.000. Calcule la rentabilidad real y nominal en base a los siguientes datos:

Inversión inicial : $5.000.000
Rescate inversión : $5.500.000
UF Inicial : 21.500
UF Final : 22.575

PROBLEMA 06. Calcule la rentabilidad real en base a los siguientes datos:

Rentabilidad nominal : 3,0%
UF Inicial : 21.390
UF Final : 21.744

PROBLEMA 07. Calcule la rentabilidad real en base a los siguientes datos:

Rentabilidad nominal : 0,9%
UF Inicial : 21.000
UF Final : 20.580

PROBLEMA 08. Un inversionista tomó un depósito a plazo en las siguientes condiciones:

Valor Inicial en $: 80.000.000
Valor UF inicial : 22.000
Tasa real : 3,0 % anual (base 360 días)
Valor UF final : 22.500 UF
Periodo : 125 días

- **a)** Calcule el valor final del depósito a plazo en UF.
- **b)** Calcule el valor de rescate del depósito a plazo en pesos.
- **c)** ¿Qué rentabilidad real obtuvo en el período el inversionista?
- **d)** ¿Qué rentabilidad nominal obtuvo?
- **e)** ¿Qué valor habría conseguido el inversionista si vende el depósito a plazo en bolsa a una tasa de descuento de UF +2,8%, cuando le quedaban 30 días por vencer?

PROBLEMA 09. Un inversionista tomó un depósito a plazo en UF de acuerdo a las siguientes condiciones:

Valor Inicial en $: 50.000.000
UF inicial : $ 21.500
Tasa anual en UF : 1,5% anual (base 360 días)
Plazo de la Inversión : 92 días
Valor final de la UF : $21.900

- **a)** Calcule el capital más intereses que entregará el depósito a plazo en UF a su vencimiento
- **b)** Calcule el valor de rescate del depósito a plazo en pesos Valor de Rescate en $= 2.334,50 x 21.900= $51.125.550
- **c)** ¿Qué rentabilidad real obtuvo en el período el inversionista?
- **d)** ¿Qué rentabilidad nominal obtuvo?

PROBLEMA 10. Un inversionista hace una inversión en acciones Endesa según lo siguiente:

Capital Inicial : $ 105.300.000
Precio de la acción : $ 780

- **a)** ¿Cuántas acciones compro?
- **a)** ¿Si las acciones las vende a $800 que monto recibiría? Monto Venta= 135.000 x 800= $108.000.000
- **b)** ¿Cuál es la rentabilidad nominal que obtuvo?

INFORMACIÓN (INCLUÍDA EN ESTE DOCUMENTO EDUCATIVO) TOMADA DE:

Sitios web:

1. http://www.hiru.eus/matematicas/recta-de-regresion-y-correlaciones
2. http://www.vitutor.com/estadistica/bi/recta_regresion.html
3. http://www.vitutor.com/estadistica/bi/1.html hacia http://www.vitutor.com/estadistica/bi/8.html
4. http://www.vitutor.com/estadistica/bi/ejercicios_correlacion.html
5. http://www5.uva.es/estadmed/datos/indices/indices.htm
6. http://www5.uva.es/estadmed/datos/indices/indices.htm
7. http://www.vitutor.com/estadistica/bi/10.html hacia http://www.vitutor.com/estadistica/bi/16.html
8. https://www.mytriplea.com/diccionario-financiero/rentabilidad-real
9. http://www.cursosdeinversiones.cl/file/ResolucionTallerMatematicasFinancieras01.pdf