CBS
Colegio Bautista Shalom

Matemática V
Bachillerato por Madurez
Segundo Semestre

Contenidos

SISTEMAS DE TRES ECUACIONES DE PRIMERO GRADO CON TRES INCÓGNITAS

- ✓ SOLUCIÓN POR MÉTODO DE ELIMINACIÓN DE GAUSS.
- ✓ SOLUCIÓN MÉTODO POR DETERMINANTES.

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA

- ✓ MÉTODO DE FACTORIZACIÓN.
- ✓ MÉTODO FÓRMULA CUADRÁTICA.

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

- ✓ SOLUCIÓN POR COMPLETACIÓN DE CUADRADOS.
- ✓ TRABAJANDO CON ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO.
- ✓ ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO COMPLETA.

SISTEMAS DE SEGUNDO GRADO CON DOS INCÓGNITAS

- ✓ ECUACIONES BICUADRADAS.
- ✓ MÉTODO DE SOLUCIÓN GRÁFICO.

NOTA: conforme vayas avanzando en tu aprendizaje debes realizar uno de los ejercicios. Copia y desarrolla cada ejercicio en hojas blanco bond, realiza cada gráfica en hojas milimetradas y sigue las instrucciones de tu catedrático(a) para entregar.

SISTEMAS DE TRES ECUACIONES DE PRIMERO GRADO CON TRES INCÓGNITAS

RECORDANDO…

Lo que hace una ecuación con varias incógnitas es relacionarlas entre sí.

Un sistema de ecuaciones (lineales) es un conjunto de ecuaciones (lineales) con varias incógnitas. Generalmente, las incógnitas aparecen en varias ecuaciones. Resolver un sistema consiste en encontrar los valores de todas las incógnitas para los cuales se verifican todas las ecuaciones que conforman el sistema. Si alguna de las ecuaciones no se verifica, entonces no se trata de una solución.

- ✓ Si hay una única solución (un valor para cada incógnita) decimos que el sistema es compatible determinado (SCD).
- ✓ Si hay varias (en este caso hay infinitas) soluciones, decimos que es compatible indeterminado (SCI).
- ✓ Si no hay ninguna, y esto ocurre cuando dos o más ecuaciones no pueden verificarse al mismo tiempo, decimos que es incompatible (SI). Por ejemplo, el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y & = & 0 \\ 2x + y & = & 0 \\ 2x + y & = & 2 \end{cases}$$

es incompatible ya que la segunda ecuación exige $x = 0$ y la tercera, $x = 1$.

En esta sección vamos a resolver sistemas mediante el método de eliminación de Gauss, que consiste simplemente en realizar operaciones elementales fila o columna sobre la matriz ampliada del sistema hasta obtener la forma escalonada o escalonada reducida (Gauss-Jordan).

Sin embargo, cabe decir que probablemente el método más rápido es estudiar el **rango** de la matriz para determinar el tipo de sistema. Si es SCD, aplicamos Kramer. Si es SCI, eliminación de Gauss. Si es SI, no necesitamos realizar cálculos.

Es importante que recordemos… En un sistema de ecuaciones, una **operación elemental fila** consiste en:

- ✓ Multiplicar toda una ecuación por en escalar no nulo.
- ✓ Intercambiar el orden de las filas.
- ✓ Sumar a una ecuación otra ecuación multiplicada por un escalar.

Este tipo de operaciones no alteran la solución del sistema. Es por esto que decimos que los sistemas son **equivalentes**.

SOLUCIÓN POR MÉTODO DE ELIMINACIÓN DE GAUSS

En esencia consiste en hacer, al sistema de ecuaciones lineales, determinadas transformaciones elementales a fin de obtener un sistema escalonado (un sistema es escalonado cuando cada ecuación tiene una incógnita menos que la anterior), más fácil de resolver. La idea del método es muy simple: ir reduciendo en cada paso el problema a un problema que tiene una ecuación menos y una incógnita menos.

Este método es mejor conocido como método de eliminación de Gauss. El procedimiento es el siguiente:

1. Tomando como base el signo de una de las incógnitas de una ecuación, se procura que en las otras dos ecuaciones esa incógnita tenga la misma magnitud y signo contrario, para que al sumarlas miembro a miembro se elimine dicha incógnita, dando lugar a que en todas las ecuaciones desaparezca, excepto en una.
2. Se procura que otra de las incógnitas tenga el mismo coeficiente en cualquiera de las dos ecuaciones reducidas para que, al sumarlas miembro a miembro, se elimine dicha incógnita, dando lugar a una ecuación con sólo la tercera incógnita, misma que se despeja.
3. Con un valor conocido, se sustituye en la ecuación reducida para obtener el valor de otra incógnita a través de un despeje.

4. Con los valores de dos incógnitas se sustituye en la ecuación que no fue reducida, y mediante un despeje se obtiene el valor faltante.

Por ejemplo: resolver los siguientes sistemas aplicando el método de eliminación de Gauss.

$$\begin{cases} 2x+3y-5z=-13 \\ 4x+5y-2z=3 \\ -6x-2y-3z=-12 \end{cases}$$

Solución: la primera ecuación se multiplica por − 2 y se suma a la segunda. La primera ecuación se multiplica por 3 y se suma a la tercera:

$$\begin{cases} 2x+3y-5z=-13 \\ -y+8z=29 \\ 7y-18z=-51 \end{cases}$$

La segunda ecuación se multiplica por 7 y se suma a la tercera:

$$\begin{cases} 2x+3y-5z=-13 \\ -y+8z=29 \\ 38z=152 \end{cases}$$

de la tercera ecuación se despeja z:

$$z=\frac{152}{38}=4$$

se sustituye este valor en la segunda ecuación y se despeja y:

$$-y+8(4)=29 \Longrightarrow -y+32=29 \Longrightarrow -y=29-32=-3 \Longrightarrow y\frac{-3}{-1}=3$$

estos valores, se sustituyen en la primera ecuación y se despeja x:

$$2x+3(3)-5(4)=-13 \Longrightarrow 2x+9-20=-13 \Longrightarrow 2x=-13-9+20=-2 \Longrightarrow x=\frac{-2}{2}=-1$$

Por lo tanto la solución del sistema es: $x=-1\ y=3\ z=4$

$$Comprobación: \begin{cases} 2(-1)+3(3)-5(4)=2+9-20=-13 \\ 4(-1)+5(3)-2(4)=-4+15-8=3 \\ -6(-1)-2(3)-3(4)=6-6-12=-12 \end{cases}$$

GAUSS Y GAUSS – JORDAN

La diferencia entre los métodos de Gauss y de Gauss-Jordan es que el primero finaliza al obtener un sistema equivalente en forma escalonada, mientras que el segundo finaliza al obtener un sistema equivalente en forma escalonada reducida.

1. Aplicamos el método de eliminación de Gauss-Jordan. Obtener la forma escalonada reducida de la matriz ampliada del sistema de ecuaciones mediante operaciones elementales fila (o columna).
   Una vez tenemos la matriz en forma escalonada reducida, la obtención de la solución es inmediata.
2. Aplicaremos el Teorema de Rouché-Frobenius para determinar el tipo de sistema. Sea *A·X = B* un sistema de *m* ecuaciones lineales con *n* incógnitas (sobre un cuerpo en general), siendo *m* y *n* naturales (no nulos):

- ✓ *A·X = B* es **compatible** si, y sólo si, *rango(A) = rango (A|B)*.
- ✓ *A·X = B* es compatible **determinado** si, y sólo si, *rango(A) = n = rango(A|B)*.

NOTA: las operaciones elementales fila y columna nos permiten obtener sistemas equivalentes al inicial pero con una forma que facilita la obtención de las soluciones (en caso de haberlas). Asimismo, existen herramientas más rápidas para hallar las soluciones de los sistemas compatibles determinados, como la Regla de Kramer.

EJERCICIO 01: resolver los siguientes sistemas de ecuaciones por medio del método de eliminación de Gauss o Gauus-Jordan.

1.
$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -16 \\ 3x + y - 2z = -10 \\ 2x - 3y + z = -4 \end{cases}$$

x = ____ y = ____ z = ____

2.
$$\begin{cases} x + 4y - 8z = -8 \\ 4x + 8y - z = 76 \\ 8x - y - 4z = 110 \end{cases}$$

x = ____ y = ____ z = ____

3.
$$\begin{cases} x - y + z \quad = 3 \\ \quad 2y + 3z = 15 \\ 3x + y \qquad = 12 \end{cases}$$

x = ____ y = ____ z = ____

4.
$$\begin{cases} x - 3y + 4z = 21 \\ 3x + y - z = -18 \\ 2x - y + 3z = 12 \end{cases}$$

x = ____ y = ____ z = ____

5.
$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 4z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

x = ____ y = ____ z = ____

6.
$$\begin{cases} 5x+2y=2 \\ 2x+y-z=0 \\ 2x+3y-z=3 \end{cases}$$

x = ____ y = ____ z = ____

7.
$$\begin{cases} 2x-y+3z=5 \\ 2x+2y+3z=7 \\ -2x+3y=-3 \end{cases}$$

x = ____ y = ____ z = ____

8.
$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ -3x-2y-z=2 \\ 4x+4y+4z=3 \end{cases}$$

x = ____ y = ____ z = ____

9.
$$\begin{cases} x-y+5z=\sqrt{2} \\ \sqrt{5}x+z=\sqrt{3} \\ \frac{2}{5}x++3y+2z=\frac{5}{2} \end{cases}$$

x = ____ y = ____ z = ____

10.
$$\begin{cases} 2x+3y+z=1 \\ 3x-2y-4z=2 \\ 5x-y-z=4 \end{cases}$$

x = ____ y = ____ z = ____

Para mayor comprensión del alumnado, y mayor facilidad de su explicación podrá observar la solución del primer ejercicio:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -16 \\ 3x + y - 2z = -10 \\ 2x - 3y + z = -4 \end{cases}$$

Pasos

1. Suprimimos la x de la segunda ecuación, reduciendola con la primera.

Multiplicamos la 1ª por (-3) y sumamos las dos.

Obtenemos la segunda ecuación ya sin x.

$$\begin{matrix} 1^a \\ 2^a \end{matrix}\begin{cases} x+2y-3z=-16 \\ 3x+y-2z=-10 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} 1^a\,(-3) \\ 2^a \end{matrix}\begin{cases} -3x-6y+9z=48 \\ 3x+y-2z=-10 \end{cases}$$

Sumamos las dos ecuaciones para obtener la segunda ecuación transformada.

$2^a \rightarrow 0x-5y+7z=38$

Obtenemos la 3ª ecuación ya sin x.

2. Suprimimos la x de la tercera ecuación, reduciendola con la primera.

Multiplicamos la 1ª por (−2) y sumamos las dos.

$$\begin{matrix} 1^a \\ 3^a \end{matrix}\begin{cases} x+2y-3z=-16 \\ 2x-3y+z=-4 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} 1^a\,(-2) \\ 3^a \end{matrix}\begin{cases} -2x-4y+6z=32 \\ 2x-3y+z=-4 \end{cases}$$

Sumamos las dos ecuaciones para obtener la tercera ecuación transformada.

$3^a \rightarrow 0x-7y+7z=28$

3. Escribimos el sistema obtenido.

$$\begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a \end{matrix}\begin{cases} x+2y-3z=-16 \\ 0-5y+7z=38 \\ 0-7y+7z=28 \end{cases}$$

4. Eliminamos la y de la 3ª reduciendola con la segunda.

Obtenemos la 3ª ecuación ya sin y.

$$\begin{matrix} 2^a & (7) \\ 3^a & (-5) \end{matrix}\begin{cases} -5y+7z=38 \\ -7y+7z=28 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -35y+49z=266 \\ +35y-35z=-140 \end{cases}$$

$3^a \rightarrow 14z=126$

5. Con el sistema escalonado obtenemos las soluciones.

$$\begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a \end{matrix}\begin{cases} x+2y-3z=-16 \\ 0-5y+7z=38 \\ 0+0y+14z=126 \end{cases}$$

– Calculamos z en la 3ª ecuación.

$14z=126 \rightarrow z=9$

– Sustituimos z en la 2ª y calculamos la y.

$-5y+7(9)=38 \rightarrow y=5$

– Sustituimos z e y en la 1ª para calcular la x.

$x+2(5)-3(9)=-16 \rightarrow x=1$

Para comprobar si las soluciones son las correctas, es necesario que sustituyas los valores encontrados de las incógnitas en el sistema de ecuaciones original.

Para mayor comprensión del alumno/a; y mayor facilidad de su explicación podrá observar la solución del cuarto ejercicio:

Resolver el sistema: $\begin{cases} x-3y+4z=21 \\ 3x+y-z=-18 \\ 2x-y+3z=12 \end{cases}$

Hacemos cero las x de las filas 2 y 3 operando con la fila 1

$$\begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{matrix}\begin{cases} x-3y+4z=21 \\ 3x+y-z=-18 \\ 2x-y+3z=12 \end{cases} \xrightarrow{F_2=3F_1-F_2} \begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{matrix}\begin{cases} x-3y+4z=21 \\ 0-10y+13z=81 \\ 2x-y+3z=12 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{F_3=2F_1-F_3} \begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{matrix}\begin{cases} x-3y+4z=21 \\ 0-10y+13z=81 \\ 0-5y+5z=30 \end{cases}$$

Hacemos cero la y de la fila 3 operando con la fila 2.

$$\xrightarrow{F_3=F_2-2F_3} \begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{matrix}\begin{cases} x-3y+4z=21 \\ 0-10y+13z=81 \\ 0\quad 0+3z=21 \end{cases}$$

Calculamos z de la F_3 $\rightarrow +3z=21 \rightarrow z=\frac{21}{3}=7$

Calculamos y de la F_2

$-10y+13z=81 \rightarrow -10y+13\cdot 7=81 \rightarrow y=\frac{81-91}{-10}=1$

Calculamos x de la F_1

$x-3y+4z=21 \rightarrow x=21+3\cdot 1-4\cdot 7 \rightarrow x=-4$

Solución: $x=-4,\ y=1,\ z=7$

SOLUCIÓN MÉTODO POR DETERMINANTES

La Regla de Kramer se puede generalizar para resolver Sistemas de Ecuaciones Lineales de n ecuaciones con n incógnitas, quedando escrita de la forma siguiente.

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta s} \quad , \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta s} \quad , \quad z = \frac{\Delta x}{\Delta s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad i = \frac{\Delta i}{\Delta s} \qquad etc.$$

Dónde:

i Representa cualquiera de las "n" incógnitas.
Δs Es el determinante de los coeficientes de las incógnitas con las ecuaciones ordenadas del sistema de ecuaciones.
Δi Es el determinante que se forma cuando se sustituye los términos constantes sobre la columna de la incógnita i en Δs.

Por ejemplo: resolver el Sistemas de Ecuaciones Lineales dado usando la Regla de Kramer.

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & 3 \\ 2x & - & y & + & z & = & 7 \\ 2x & + & y & - & 4z & = & -1 \end{array}$$

Solución: realizaremos cuatro pasos en la solución de un Sistema de Ecuaciones Lineales que son las siguientes:

Se calcula el delta del Sistema (Ds) formado por los Coeficientes del sistema de ecuaciones lineales. (Por cualquier método):

$$\Delta s = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\Delta s = 1\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} + (2)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta s = 1(4-1) - 2(-8+1) + 2(2-1)$$

$$\Delta s = 3 + 14 + 2 = 19$$

$$\Delta s = 19$$

<u>Conclusión</u>: como $\Delta s \neq 0$ hay solución única.

Calculamos ahora las deltas: $\Delta x, \Delta y$ y Δz quedando formados como sigue:

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 7 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -4 \end{vmatrix} \qquad \Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} \qquad \Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Observen como los términos constantes ocupan la columna de la incógnita a calcular (marcada con asterisco) quedando:

$$\Delta x = 57 \qquad \Delta y = 19 \qquad \Delta z = 38$$

Los cálculos se dejan como ejercicio al estudiante. Se calculan las incógnitas "x", "y" y "z" usando la Regla Kramer.

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta s} \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta s} \qquad z = \frac{\Delta z}{\Delta s}$$

$$x = \frac{57}{19} \qquad y = \frac{19}{19} \qquad z = \frac{38}{19}$$

$$x = 3 \qquad y = 1 \qquad z = 2$$

Se comprueba la solución por sustitución en cualquiera de las ecuaciones dadas.

$$\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & - & z & = & 3 \\ 3 & + & 2(1) & - & 2 & = & 3 \\ 3 & + & 2 & - & 2 & = & 3 \end{array}$$

EJERCICIO 02: resolver los siguientes sistemas de ecuaciones por medio de la Regla de Kramer.

1.
$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ 2y - z = 1 \\ -x + y = 1 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y + 3z = 2 \\ x + z = 5 \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} 2x - y - 2z = -2 \\ -x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 8 \end{cases}$$

5.
$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 10 \\ 4x - y + z = 4 \\ -2x + y + z = -2 \end{cases}$$

6.
$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 2 \\ -2x + y - 7z = 0 \\ 3x - y + 8z = 2 \end{cases}$$

7.
$$\begin{cases} -x + 2y - 2z = 1 \\ -3x + 5y - z = 2 \\ -x + y + 9z = -1 \end{cases}$$

8.
$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ -3x + 4y - 5z = 0 \\ -x - 7y + 8z = 0 \end{cases}$$

9.
$$\begin{cases} \sqrt{3}x + 2\sqrt{3}y + 2\sqrt{3}z = -\sqrt{3} \\ 2x + y - z = 0 \\ 2x - 2y + 10z = 2 \end{cases}$$

10.

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 12 \\ x - y + 4z = 19 \\ 5x - 3y + z = 8 \end{cases}$$

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA

Sabemos que una ecuación es una relación matemática entre números y letras. Normalmente se trabaja con ecuaciones en las que sólo hay una letra, llamada **incógnita**, que suele ser la **x**.

Si en la ecuación la incógnita está elevada al cuadrado, decimos que es una **ecuación de segundo grado (llamadas también ecuaciones cuadráticas)**, que se caracterizan porque pueden tener **dos soluciones** (aunque también una sola, e incluso ninguna).

Una ecuación cuadrática con coeficientes reales es una ecuación de la forma.

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

Siendo a, b, y c números reales.

A continuación te damos ejemplos de ecuaciones cuadráticas:

$$x^2 - 4x = 0; \quad 2x^2 - 3x + 1 = 0; \quad x^2 + 5x + 6 = 0 \; ; \quad 5x^2 - 20 = 0; \quad x^2 + 1 = 0$$

RAÍZ O SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA

Un número r es una raíz, o una solución de la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$, si y solo si, al sustituir x por r, se cumple la igualdad. Es decir, $a \cdot r^2 + b \cdot r + c = 0$

MÉTODO DE FÓRMULA

Resolver al ecuación $ax^2+bx+c=0$, siendo $a \neq 0$ (expresada en la forma canónica).

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) = -c$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-4ac + b^2}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Por lo tanto, las raíces de la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$ (escrita en la forma canónica) se pueden obtener usando la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

MÉTODO DE FACTORIZACIÓN

Cualquier ecuación de segundo grado o cuadrática se puede expresar de la siguiente forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Donde **a**, **b** y **c** son unos parámetros que habrá que sustituir por los números reales que corresponda en cada caso particular.

Partiendo de,

$ax^2 + bx + c = 0$, en donde a, b y c son constantes, con $a \in \mathbb{R}$ $b \in \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$,

además $a \neq 0$ y x es la incógnita **real**

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0, \qquad \text{dividiendo por } a \text{ ambos lados de la igualdad.}$$

Por ejemplo:

$$2x^2 + 3x - 2 = 0$$

Esta ecuación puede ser resuelta, por medio de la factorización de un polinomio y la propiedad absorbente del cero, este método justifica en parte del ¿para qué de la factorización?

Factorizando por medio de inspección obtenemos,

$$(x+2)(2x-1) = 0$$

Utilizando la propiedad absorbente del cero tenemos que:

$$x + 2 = 0 \text{ ó } 2x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = -2 \quad \text{y} \quad 2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{el conjunto solución es } S = \left\{\frac{1}{2}, -2\right\}.$$

MÉTODO FÓRMULA CUADRÁTICA

Para obtener la fórmula para resolver ecuaciones de segundo grado, tomamos la ecuación general

$$ax^2 + bx + c = 0$$

y resolvemos para *x*, en función de los coeficientes *a, b* y *c*, por el método de compleción del cuadrado; de esta manera obtenemos una fórmula que podremos memorizar y utilizar siempre que se conozca el valor de *a, b* y *c*.
Para empezar haremos igual a 1 el coeficiente principal. Para ello, multiplicamos por 1/*a* ambos miembros de la ecuación. Queda así:

$$x^2 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} = 0$$

Sumamos –*c/a* a ambos miembros de la ecuación para suprimir *c/a* del miembro izquierdo.

$$x^2 + \frac{b}{a} = -\frac{c}{a}$$

Ahora completamos el cuadro del miembro izquierdo; para ello, sumamos a cada miembro del cuadrado de la mitad del coeficiente de *x*;

$$x^2 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

Luego, factorizamos el miembro izquierdo de la ecuación y la resolvemos por medio de la raíz cuadrada.

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$x=\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{\sqrt{4a^2}}$$

Obtenemos esto:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Esta última ecuación se llama fórmula cuadrática. Es necesario memorizarla y emplearla para resolver ecuaciones cuadráticas, cuando no dan resultado métodos más sencillos.

Observa que b^2-$4ac$ recibe el nombre de discriminante y nos proporciona la siguiente información útil respecto de las raíces:

$$b^2-4\,ac$$
$$a\,x^2+bx+c=0$$

Posibilidades de solución:

- ✓ Positivo.
- ✓ Dos soluciones reales.
- ✓ Cero.
- ✓ Una solución real.
- ✓ Negativo.
- ✓ Dos soluciones complejas.

Por ejemplo:

Resuelve $2x^2-4x-3=0$ por la fórmula cuadrática.

Solución: notamos la fórmula cuadrática e identificamos: a=2, b=-4 y c=-3.

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Sustituimos la fórmula y simplificamos:

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4(2)(-3)}}{2(2)}$$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{16+24}}{4}$$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{40}}{4}$$

$$x=\frac{4\pm2\sqrt{10}}{4}$$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{10}}{2}$$

EJERCICIO 03: a continuación se te presentan ecuaciones cuadráticas y ecuaciones que debes convertirlas en cuadráticas (todas de una sola incógnita). Debes de emplear el método adecuado para encontrar la/s solución/es de cada una de ellas.

1. $(x+3)(2x-1)=9$	2. $(x+5)(x-2)=0$	3. $3y^2+8y-9=2y$
4. $9x^2-4=0$	5. $a^2-14a=-45$	6. $x^2+6x-16=0$
7. $x^2-6x+8=0$	8. $x^2+4x-21=0$	9. $x^2+9x+20=0$
10. $-2x^2+3x+2=0$	11. $x^2-3x-70=0$	12. $x^2-18x+80=0$
13. $x^2-9x-36=0$	14. $x^2+2x-48=0$	15. $x^2+x-72=0$

INVESTIGACIÓN PARA NOTA FINAL:

1. Debes investigar el concepto de Sistemas de Ecuaciones con Dos y con Tres Incógnitas. Describe el procedimiento que es necesario realizar para su solución. Incluye por lo menos 3 ejemplos (desarrollados) de Dos y Tres Incógnitas, y explica paso a paso (con tus propias palabras) la solución de cada uno.
2. Sigue las instrucciones de tu catedrático(a) para su presentación.
3. Tu catedrático(a), realizará una prueba sobre estos dos temas de investigación (te pondrá a solucionar problemas), por lo que debes realizar dicha investigación a consciencia; ya que depende de ello dependerá tu final.
4. Tu catedrático(a) te indicará cómo te evaluará.

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

SOLUCIÓN POR COMPLETACIÓN DE CUADRADOS

Se llama método de la **completación de cuadrados** porque se puede completar un cuadrado geométricamente, y porque en la ecuación cuadrática se pueden realizar operaciones algebraicas que la transforman en una ecuación del tipo:

$$(ax+b)^2=n$$

en la cual el primer miembro de la ecuación **(ax + b)** ^{2}, es el **cuadrado de la suma de un binomio**.

Partiendo de una ecuación del tipo:

$$x^2+bx+c=0$$

por ejemplo, la ecuación:

$x^2 + 8x = 48$, que también puede escribirse **$x^2 + 8x - 48 = 0$**

Al primer miembro de la ecuación **(x^2 + 8x)** le falta un término para completar el **cuadrado de la suma de un binomio** del tipo:

$$(ax + b)^2$$

Que es lo mismo que:

$$(ax + b)(ax + b)$$

Que es lo mismo que:

$$(ax)^2 + 2axb + b^2$$

En nuestro ejemplo:

$x^2 + 8x = 48$, el **8** representa al doble del segundo número del binomio, por lo tanto, ese número debe ser obligadamente 8 dividido por 2 (8/2), que es igual a 4, y como en el cuadrado de la suma de un binomio **($a^2 + 2ab + b^2$)** el tercer término corresponde al cuadrado del segundo término **($4^2 = 16$)** amplificamos ambos miembros de la ecuación por 16, así tenemos:

$$x^2 + 8x + 16 = 48 + 16$$

$$\mathbf{x^2 + 8x + 16 = 64}$$

la cual, factorizando, podemos escribir como sigue:

$$\mathbf{(x + 4)\,(x + 4) = 64}$$

Que es igual a:

$$\mathbf{(x + 4)^2 = 64}$$

Extraemos raíz cuadrada de ambos miembros y tenemos:

$$\sqrt{(x+4)^2} = \sqrt{64}$$

Nos queda:

$$\mathbf{x + 4 = 8}$$

Entonces:

$\mathbf{x = 8 - 4}$
$\mathbf{x = 4}$

Se dice que **"se completó un cuadrado"** porque para el primer miembro de la ecuación se logró obtener la expresión **$(x + 4)^2$**, que es el cuadrado perfecto de un binomio.

Veamos otro ejemplo:

Partamos con la ecuación

$$\mathbf{x^2 + 6x - 16 = 0}$$

Hacemos:

$$\mathbf{x^2 + 6x = 16}$$

Luego, a partir de la expresión **$x^2 + 6x$** (primer miembro de la ecuación) debemos obtener una expresión de la forma **$(ax + b)^2$** (cuadrado de la suma de un binomio).

Para encontrar el término que falta hacemos:

$$\left(\frac{6}{2}\right)^2 = 3^2 = 9$$

(Para encontrar dicho término en cualquier ecuación siempre debemos dividir por 2 el valor real del segundo término y el resultado elevarlo al cuadrado).

Ahora, para obtener la expresión completa se suma 9 a ambos miembros de la ecuación:

$\mathbf{x^2 + 6x = 16}$
$\mathbf{x^2 + 6x + 9 = 16 + 9}$
$\mathbf{x^2 + 6x + 9 = 25}$

factorizamos, y queda:

$$(x+3)(x+3) = 25$$
$$(x+3)^2 = 25$$

La expresión $x^2 + 6x$ se ha completado para formar un cuadrado perfecto, en este caso $(x+3)^2$, y así la ecuación se resuelve con facilidad:

Extraemos raíz cuadrada:

$\sqrt{(x+3)^2} = \sqrt{25}$, y queda

$$x + 3 = 5 \quad y \quad x + 3 = -5$$

(pues $5^2 = 5$ y también $(-5)^2 = 5$

Entonces:

$$x = 5 - 3$$
$$x = 2$$

Y

$$x = -5 - 3$$
$$x = -8$$

La ecuación **1** da $x = 2$ y la ecuación **2** da $x = -8$.

Otro ejemplo para analizar y estudiar:

Resolver la ecuación: $x^2 - 6x + 8 = 0$

Veamos: Con los términos x^2 y $-6x$ podemos formar el cuadrado de binomio $(x-3)^2$, pero nos faltaría el término igual a 9, por lo tanto, dejamos las equis (x) a la izquierda y pasamos el 8 a la derecha de la igualdad:

$$x^2 - 6x = -8$$

y sumamos 9 a ambos lados de la igualdad para que a la izquierda se forme el cuadrado de binomio:
¿Cómo encontramos el término que falta?, haciendo:

$$\left(\frac{-6}{2}\right)^2 = -3^2 = 9$$

$x^2 - 6x = -8$ /+9 (sumamos 9 en ambos miembros de la ecuación)
$x^2 - 6x + 9 = -8 + 9$
$(x-3)^2 = 1$

Extraemos las raíces cuadradas:

$$\sqrt{(x-3)^2} = \sqrt{1}$$

y queda

$x - 3 = 1$ y $x - 3 = -1$

Si:

$$\mathbf{x - 3 = 1}$$
$$\mathbf{x = 1 + 3}$$
$$\mathbf{x = 4}$$

Si:

$$\mathbf{x - 3 = -1}$$
$$\mathbf{x = -1 + 3}$$
$$\mathbf{x = 2}$$

Por lo tanto $\mathbf{x_1 = 4}$ y $\mathbf{x_2 = 2}$

Debemos hacer notar que el método de completar cuadrados terminará en lo mismo que la fórmula general, porque es de este método de donde sale dicha fórmula, usada en el método que vemos a continuación.

Aquí debemos anotar algo muy importante:

En la fórmula para resolver las ecuaciones de segundo grado aparece la expresión $\sqrt{\mathbf{b}^2 - 4\mathbf{ac}}$. Esa raíz cuadrada sólo existirá cuando el radicando (**b^2 – 4ac**) sea positivo o cero.

El radicando **b^2 – 4ac** se denomina **discriminante** y se simboliza por **Δ**. El número de soluciones **(llamadas también raíces)** depende del signo de **Δ** y se puede determinar incluso antes de resolver la ecuación.

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$$

Entonces, estudiando el signo del discriminante (una vez resuelto), podemos saber el número de soluciones que posee:

Si Δ es positivo, la ecuación tiene dos soluciones.
Si Δ es negativo, la ecuación no tiene solución.
Si Δ es cero, la ecuación tiene una única solución.

En el ejemplo anterior el discriminante era **Δ = 49**, positivo, por eso la ecuación tenía dos soluciones.

Obtendremos dos soluciones, una cuando sumamos a − b la raíz y lo dividimos por 2a, y otra solución cuando restamos a − b la raíz y lo dividimos por 2a.

TRABAJANDO CON ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Como lo dijimos al comienzo, cualquier ecuación de segundo grado puede, mediante transformaciones, expresarse en la forma $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$, donde a, y b son los **coeficientes** de los términos $\mathbf{x^2}$ y **x**, respectivamente y **c** es el término independiente.

ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO COMPLETA

Una ecuación de segundo grado es **completa** cuando los tres coeficientes **a,** **b**, y **c** son distintos de cero.

Entonces, la expresión de una ecuación de segundo grado completa es:

$$\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$$

ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO INCOMPLETA

Una ecuación de segundo grado es **incompleta** cuando los términos **b** o **c** , o ambos, son cero.

(Si **a = 0** , la ecuación resultante sería **bx + c = 0** , que no es una ecuación de segundo grado.)

La expresión de una ecuación de segundo grado incompleta es:

$$\mathbf{ax^2 = 0;\quad si\quad b = 0\quad y\quad c = 0.}$$
$$\mathbf{ax^2 + bx = 0;\quad si\quad c = 0.}$$

$ax^2 + c = 0$; si $b = 0$.

EJERCICIO 04. RESOLVIENDO Y APRENDIENDO…

1) Resolver: $-5x^2 + 13x + 6 = 0$

Se identifican las letras, cuidando que la ecuación esté ordenada respecto a la **x**, de grado mayor a menor. Con esta condición tenemos: **a = − 5; b = 13; c = 6**.

Se aplica la fórmula:

$$x = \frac{-13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot (-5) \cdot 6}}{2 \cdot (-5)} = \frac{-13 \pm \sqrt{169 - (-120)}}{-10} = \frac{-13 \pm \sqrt{289}}{-10}$$

Como la raíz buscada es 17 (el cuadrado de 17 es 289), se tiene entonces que:

$$x = \frac{-13 \pm 17}{-10}$$

Según esto, tendremos dos raíces diferentes, una usando el signo + y otra usando el signo −.

Llamaremos X_1 y X_2 a las dos soluciones, que serán:

$$x_1 = \frac{-13 + 17}{-10} = \frac{4}{-10} = -\frac{2}{5}$$
$$x_2 = \frac{-13 - 17}{-10} = \frac{-30}{-10} = 3$$

Ambos valores de x satisfacen la ecuación, es decir, al sustituirlos en ella producen una identidad. Al procedimiento de sustituir para probar si los valores hallados satisfacen la ecuación se le denomina **verificación.**

Probando con x = 3. Resulta: **−5 • (3)2 + 13 • (3) + 6 = −45 + 39 + 6 = 0**, tal como se esperaba en el segundo miembro.

Probando con: $x = -\frac{2}{5}$, se tiene

$$-5\left(-\frac{2}{5}\right)^2 + 13\left(-\frac{2}{5}\right) + 6 = -5\left(\frac{4}{25}\right) + \left(-\frac{26}{5}\right) + 6 = -\frac{\overset{4}{\cancel{20}}}{\underset{5}{\cancel{25}}} - \frac{26}{5} + 6 = -\frac{4}{5} - \frac{26}{5} + 6 = -\frac{\overset{6}{\cancel{30}}}{\underset{1}{\cancel{5}}} + 6 = -6 + 6 = 0$$

Como ambas respuestas producen identidades, ahora es seguro que 3 y $-\frac{2}{5}$ son las raíces de **$-5x^2 + 13x + 6 = 0$.**

2) Resolver: $6x - x^2 = 9$

Hacemos los cambios necesarios para que la ecuación tenga la forma conocida. Trasponiendo y cambiando de lugar resulta:

$-x^2 + 6x - 9 = 0$. Ahora se identifican las letras:

a = −1 ; b = 6 ; c = −9 ; y se aplica la fórmula:

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-9)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 36}}{-2} = \frac{-6 \pm \sqrt{0}}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3$$

El discriminante (Δ) es igual a cero, por lo cual se producen dos raíces iguales a 3, es decir, $x_1 = x_2 = 3$.

Sustituyendo los valores en la ecuación original, se verifica que: **6•3 – 32 = 18 – 9 = 9** con lo cual se ha comprobado la respuesta.

EJERCICIO 05. PROBLEMAS A RESOLVER POR MEDIO DE ECUACIONES CUADRÁTICAS…

En los siguientes ejercicios mostraremos algunos planteamientos que pueden expresarse como una **ecuación de segundo grado**.

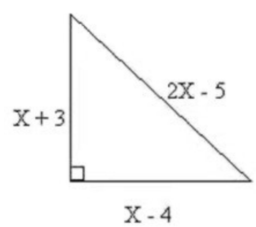
Para hacerlo, hay que entender la lógica del problema, identificando como **x** a una de las variables que el problema establece; luego deben escribirse las relaciones entre la variable, de acuerdo al planteamiento y, finalmente, se resuelve la ecuación.

Hay que destacar que sólo la experiencia mejora los resultados.

PROBLEMA 1. La suma de dos números es 10 y la suma de sus cuadrados es 58. Halla ambos números.

PROBLEMA 2. El largo de una sala rectangular es 3 metros mayor que el ancho. Si el ancho aumenta 3m y el largo aumenta 2m, el área se duplica. Halla el área original de la sala.

PROBLEMA 3. Halla el área y perímetro del triángulo rectángulo mostrado. Las dimensiones están en metros:



EJERCICIO 06.

RESOLVER LAS SIGUIENTES ECUACIONES CUADRÁTICAS:

1. $7x^2 + 21x - 28 = 0$
2. $-x^2 + 4x - 7 = 0$
3. $12x^2 - 3x = 0$
4. $4x^2 - 16 = 0$

HALLA LAS SOLUCIONES DE LAS ECUACIONES:

5. $x^4 + 12x^3 - 64x^2 = 0$
6. $\frac{3}{x} = 1 + \frac{x - 13}{6}$

RESUELVE:

7. $x^4 - 61x^2 + 900 = 0$
8. $x^4 - 25x^2 + 144 =$
9. $\sqrt{5x + 4} - 1 = 2x$
10. $3\sqrt{x - 1} + 11 = 2x$

HALLAR LAS RAÍCES DE:

11. $2x^3 - 7x^2 + 8x - 3 = 0$
12. $x^3 - x^2 - 4 = 0$
13. $6x^3 + 7x^2 - 9x + 2 = 0$

SISTEMAS DE SEGUNDO GRADO CON DOS INCÓGNITAS

Recordemos que un sistema de ecuaciones es el producto de los grados de las ecuaciones que lo componen.

Un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas de segundo grado está formado por una ecuación de primer grado y otra de segundo grado, su forma normal es:

$$\begin{cases} mx^2 + ny^2 + pxy + rx + sy + q = 0 \\ ax + by + c = 0 \end{cases}$$
$$a, b, c, m, n, p, r, s, q \in R$$

Normalmente se emplea el método de sustitución para resolver éste tipo de sistemas, se despeja una incógnita de la ecuación de primer grado y se sustituye en la ecuación de segundo grado, resultando una ecuación de segundo grado con una sola incógnita.

Por ejemplo:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 3x + y = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \cdot y = 12 \\ x + y = 8 \end{cases}$$

Aplicando el método de sustitución a un sistema de dos ecuaciones de segundo grado se llega a ecuaciones de cuarto grado que solo podemos resolver en casos especiales, por ejemplo, si es bicuadrada.

Por ejemplo:

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 17 \\ x \cdot y = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + 3y^2 = \dfrac{49}{4} \\ 8x^2 - y^2 = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x^2 - 3y^2 - 4x + 6y = 6 \\ x^2 + y^2 + 3x - 2y = 18 \end{cases}$$

EJERCICIO 07. Resuelve los siguientes sistemas no lineales con dos incógnitas.

NOTA. Paso a paso, y con la instrucción de tu catedrático estudia la solución al Sistema 1) y Sistema 12) luego, resuelve los demás sistemas.

SOLUCIONANDO PARA APRENDER A SOLUCIONAR…

$$1) \quad \begin{cases} x + y = 10 \\ x^2 + y^2 = 68 \end{cases}$$

Despejamos la variable x en la primera ecuación: $x + y = 10 \quad \Leftrightarrow \quad x = 10 - y$
Sustituimos en la segunda ecuación:

$$x^2 + y^2 = 68 \quad \Rightarrow \quad (10 - y)^2 + y^2 = 68 \quad \Rightarrow \quad 100 - 20y + y^2 + y^2 = 68 \quad \Rightarrow \quad 2y^2 - 20y + 32 = 0$$

Simpificamos la ecuación dividiendo entre 2 : $y^2 - 10y + 16 = 0$

$$y = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{10 \pm 6}{2} = \begin{cases} y = 8 \\ y = 2 \end{cases}$$

Si $y = 8 \Rightarrow x = 10 - y = 10 - 8 = 2$
Si $y = 2 \Rightarrow x = 10 - y = 10 - 2 = 8$

El sistema tiene dos soluciones: $x_1 = 2$, $y_1 = 8$; $x_2 = 8$, $y_2 = 2$

12) $\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{2} \\ \frac{4}{x} + \frac{4}{y} = \frac{10}{3} \end{cases}$

Realizamos los siguientes cambios de variable:

$$\frac{1}{x} = t \qquad \frac{1}{y} = z$$

De esta forma obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 3t + z = \frac{3}{2} \\ 4t + 4z = \frac{10}{3} \end{cases}$$

A continuación quitamos denominadores:

$$\begin{cases} 6t + 2z = 3 \\ 12t + 12z = 10 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones lineales por el método de reducción:

$$\begin{array}{rrcr} \cancel{-12t} & -4z & = & -6 \\ \cancel{12t} & +12z & = & 10 \\ \hline & 8z & = & 4 \end{array}$$

Despejando la ecuación resultante tenemos que:

$z = 1/2$

Sustituimos el valor de z para calcular t:

$6t + 2z = 3$
$6t + 1 = 3$
$6t = 2$
$t = 1/3$

Por último tenemos que deshacer el cambio de variable:

$\frac{1}{x} = \frac{1}{3}$ $\qquad$ $\frac{1}{y} = \frac{1}{2}$

Por lo tanto las soluciones son:

x = 3 $\qquad$ y = 2

1) $\begin{cases} x+y=10 \\ x^2+y^2=68 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x-3y=12 \\ x^2-y^2=7 \end{cases}$

3) $\begin{cases} (x+y)^2 = 289 \\ x^2+y^2=169 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x+y=7 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{7}{12} \end{cases}$

5) $\begin{cases} x \cdot y = 1200 \\ \frac{x}{y}=\frac{1}{3} \end{cases}$

6) $\begin{cases} x \cdot y = x+y \\ x+y=5x-5y \end{cases}$

7) $\begin{cases} \frac{xy}{2}=96 \\ x^2+y^2=(x+y-8)^2 \end{cases}$

8) $\begin{cases} 20x-16y-xy=22 \\ x-y=1 \end{cases}$

9) $\begin{cases} x=\frac{48}{y} \\ x^2+y^2=100 \end{cases}$

10) $\begin{cases} xy=240 \\ \frac{x^2}{16}\,y=360 \end{cases}$

11) $\begin{cases} x+y=25 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6} \end{cases}$

12) $\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{2} \\ \frac{4}{x}+\frac{4}{y}=\frac{10}{3} \end{cases}$

13) $\begin{cases} 5x-3y-z=1 \\ x+4y-6z=-1 \\ 2x+3y+4z=9 \end{cases}$

14) $\begin{cases} x+y=7 \\ x \cdot y=12 \end{cases}$

15) $\begin{cases} x^2+y^2=169 \\ x+y=17 \end{cases}$

16) $\begin{cases} y^2-2y+1=x \\ \sqrt{x}+y=5 \end{cases}$

17) $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x+y=7 \end{cases}$

18) $\begin{cases} x+y=7 \\ x \cdot y=12 \end{cases}$

19) $\begin{cases} x+y=10 \\ xy=16 \end{cases}$

20) $\begin{cases} x+y=9 \\ x^2+y^2=41 \end{cases}$

ECUACIONES BICUADRADAS

Son las ecuaciones de cuarto grado que carecen de términos de grado impar.

Ejemplo: $x^4-20x^2+64=0$

Puedes observar que: 1º es una ecuación de cuarto grado 2º carece de términos con exponente impar.

¿CUÁNTAS RESPUESTAS O RAÍCES TIENE UNA ECUACIÓN DE 4º GRADO?

Las ecuaciones de cuarto grado tienen 4 respuestas.

¿CÓMO SE RESUELVEN?

Lo mismo que las ecuaciones de 2º grado pero haciendo un pequeño cambio: *al término en* x^2 ***lo sustituimos por y***.
Si x^2 *lo sustituimos por "y" el valor de* x^4 lo sustituiremos por $\left(x^2\right)^2$ que equivale a $(y)^2 = y^2$. *Teniendo en cuenta el contenido de las líneas anteriores la ecuación bicuadrada*: $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$
podemos escribir: $y^2 - 20y + 64 = 0$.

Ahora lo resolvemos como una ecuación completa de 2º grado:

$$y = \frac{20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \times 64}}{2} = \frac{20 \pm 12}{2} = \left\langle \begin{array}{l} y_1 = 16 \\ y_2 = 4 \end{array} \right.$$

como "y" equivale a x^2, podemos escribir : $x^2 = 16$ de donde el valor de $x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$.
Tomando la otra respuesta de y, $y_2 = 4$; $x^2 = 4$ de donde el valor de $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

$$\text{Las respuestas de } x \text{ son:} \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -4 \\ x_3 = 2 \\ x_4 = -2 \end{cases}$$

Resuelve la siguiente ecuación bicuadrada:

$$4x^4 - 37x^2 + 9 = 0$$

Respuestas:

$$x_1 = 3; x_2 = -3; x_3 = \frac{1}{2}; x_4 = -\frac{1}{2}$$

Solución:

$$\begin{array}{l} \text{Haciendo } y = x^2 \\ \qquad y^2 = x^4 \end{array}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación dada :

$$4y^2 - 37y^2 + 9 = 0; \; y = \frac{37 \pm \sqrt{37^2 - 4 \times 4 \times 9}}{8} = \frac{37 \pm 35}{8} = \left\langle \begin{array}{l} 9 \\ \frac{1}{4} \end{array} \right.$$

$$\text{Las raíces de } x \text{ son: } \pm\sqrt{9} = \pm 3 \text{ y } \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2}$$

AulaFacil.com

EJERCICIO 08. Calcula las respuestas de ***x*** en las siguientes ecuaciones:

1) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ **2)** $9x^4 - 10x^2 + 1 = 0$ **3)** $2^{x^4 - 13x^2 + 31} = 32^{-1}$

4) $\frac{6}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} = 2$ **5)** $3^{x^4 - 8x^2 + 17} = 9$ **6)** $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$

7) $x^4 = x^2$ **8)** $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ **9)** $x^4 - 74x^2 + 1225 = 0$

10) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$

11) $x^4 - 2ax^2 + a^2 - a = 0,\ a > 1$

¿por qué crees que se exige $a > 1$?

12) $x = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$

13) $x^4 + 2x^2 = 0$

14) $x^4 - 9x^2 = 0$

15) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

MÉTODO DE SOLUCIÓN GRÁFICO

Resolver un sistema formado por una parábola y una recta.

SOLUCIONES POSIBLES

1. **Dos soluciones**. La recta y la parábola se cortan en dos puntos.
2. **Una solución**, en este caso la parábola y la recta tienen un único punto en común, son secantes.
3. **Ninguna solución**, la parábola y la recta no se cortan, el sistema es incompatible.

Resolver analítica y gráficamente el sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 - x - 6 \\ 2x - y - 6 = 0 \end{cases}$$

Resolvemos por igualación.

Despejamos y en la segunda ecuación y resolvemos.

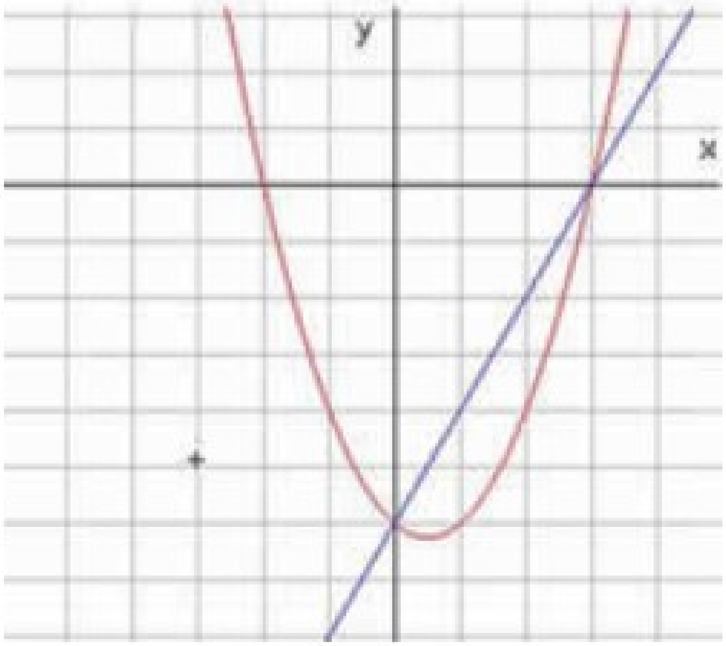
$$y = 2x - 6 \quad \rightarrow \quad x^2 - x - 6 = 2x - 6 \quad \rightarrow x^2 - 3x = 0$$

$$x(x-3) = 0 \quad \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 & \rightarrow y_1 = -6 \\ x_2 = 3 & \rightarrow y_2 = 0 \end{cases}$$

- ✓ Las soluciones son los puntos de corte entre ambas ecuaciones.
- ✓ El sistema es compatible.
- ✓ La parábola y la recta se cortan en dos puntos.

GRÁFICAMENTE

Representamos la recta y la parábola y vemos que se cortan en los puntos (0, -6) y (3, 0).



INFORMACIÓN (INCLUÍDA EN ESTE DOCUMENTO EDUCATIVO) TOMADA DE:

Libros:

009-Matemática V-2Bi5toBACO Alm. 2021