CBS
Colegio Bautista Shalom

Matemática IV
Cuarto BADC
Cuarto Bimestre

Contenidos

SUSECINES - PROGRESIONES ARITMÉTICAS Y GEOMÉTRICAS

- ✓ SUCESIÓN ARITMÉTICA.
- ✓ PROGRESIONES ARITMÉTICAS.
- ✓ SUCESIÓN GEOMÉTRICA.
- ✓ PROGRESIONES GEOMÉTRICAS.
- ✓ CONVERGENCIA.
- ✓ MONOTONÍA.
- ✓ ALTERNADA Y OSCILANTE.
- ✓ ACOTADA.
- ✓ DISTANCIA AL LÍMITE.

GEOMETRÍA PLANA

- ✓ TEOREMA DE PITÁGORAS.
- ✓ TEOREMA DE THALES.
- ✓ TEOREMA DE EUCLIDES.
    - TEOREMA DE LA ALTURA.
    - TEOREMA DE LOS CATETOS.
    - RELACIÓN ENTRE LOS TEOREMAS DE EUCLIDES.
- ✓ GEOMETRÍA Y SUS APLICACIONES.
    - SITUACIONES INTRODUCTORIAS.
        - PUNTOS, RECTAS, PLANOS Y ESPACIO.
    - SEGMENTOS Y ÁNGULOS.
    - CURVAS Y POLÍGONOS EN EL PLANO.
        - CURVAS Y REGIONES.
        - TEOREMA DE LA CURVA DE JORDAN.
    - CURVAS Y FIGURAS CONVEXAS.
    - CURVAS POLIGONALES Y POLÍGONOS.
        - POLÍGONOS REGULARES.
        - POLÍGONOS IRREGULARES.

NOTAS: conforme avances en tu aprendizaje tu catedrático(a) te indicará la actividad o ejercicio a realizar. Sigue sus instrucciones.

SUSECINES - PROGRESIONES ARITMÉTICAS Y GEOMÉTRICAS

Definimos una *sucesión* (o *progresión*) *numérica* como un conjunto de números ordenados. A cada uno de estos números los llamamos *términos* de la sucesión: a_1 es el primer término, a_2 es el segundo término, a_3 es el tercer término... a_n es el n-ésimo término.

Ejemplos:

- Sucesión de los números pares: 2, 4, 6, 8, 10, ...
- Sucesión de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

En el caso de las sucesiones aritméticas y geométricas podemos encontrar una fórmula, a la que llamamos *fórmula general de la progresión*, que nos indica el valor de cualquier término de la sucesión sin necesidad de escribir los términos anteriores. Igualmente, podemos calcular la suma de *n* términos consecutivos y, en ocasiones, la suma de infinitos términos.

En la sucesión 2, 7, 12, 17, 22, …

a_1 2 indica que el primer término de la sucesión es el 2.

a_2 7 indica que el segundo término de la sucesión es 7.

a_3 12 indica que el tercer término es el 12.

a_4 17 es el cuarto término, etc.

Una **sucesión** es **finita** cuando tiene primer y último término.
Una **sucesión** es **infinita** si tiene primer término, pero no tiene último término.

Ejemplo:

La sucesión 5, 10, 15, 20, 25 es finita. Su primer término es $a_1 = 5$ a1 = 5 y el último $a_5 = 25$..
La sucesión 2, 7, 12, 17, 22, … es infinita. Su primer término es $a_1 = 2$ y no tiene último.

SUCESIÓN ARITMÉTICA

Cada término se obtiene sumando un número, d , al término que le precede. El número d se llama diferencia de la sucesión.

Por ejemplo, en la sucesión de los números pares, la diferencia es d = 2.

La diferencia d se calcula restando dos términos consecutivos: $d = a_{n+1} - a_n$

Suma de los n primeros términos:

$$s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

Las dos reglas fundamentales son:

Sumar una misma cantidad. En la sucesión 2, 7, 12, 17, 22, 27 … cada término es el anterior más 5.

Multiplicar por una misma cantidad. En la sucesión 3, 9, 27, 81, 243, 729… cada término es el anterior por 3.

PROGRESIONES ARITMÉTICAS

Una **progresión aritmética** es una sucesión en la que cada término, salvo el primero, se obtiene sumando al anterior una cantidad fija d, llamada **diferencia** de la progresión. La sucesión 7, 10, 13, 16, 19, … es una progresión aritmética porque cada término se obtiene sumando 3 al anterior. Es decir, $d = 3$.

El término general de una progresión aritmética es: $\boldsymbol{a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d}$

donde a_1 es el primer término, y d, la diferencia.

Si se conoce el primer término de una sucesión $a_1 = 7$ y la diferencia $d = 3$, entonces podemos conocer el término general de esa sucesión:

$$a_n = 3 + (n - 1) \cdot 5$$

En la progresión aritmética 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 se cumple:

$$a_1 + a_8 = 3 + 17 = 20 \quad a_2 + a_7 = 5 + 15 = 20$$
$$a_3 + a_6 = 7 + 13 = 20 \quad a_4 + a_5 = 9 + 11 = 20$$

La suma $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ de los n primeros términos de una progresión aritmética es:

$$S_n = (a1 + an/2) \cdot n$$

En la progresión aritmética 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 se cumple:

$$S_8 = (a1 + a8/2) \cdot 8 = 10 \cdot 8 = 80$$

SUCESIÓN GEOMÉTRICA

Una sucesión geométrica, cada término se obtiene multiplicando por r al término que le precede. El número r se denomina razón. Por ejemplo, la razón de la sucesión 2, 4, 8, 16, ... es r = 2.

La razón se calcula dividiendo dos términos consecutivos:

$$r = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

El término general es:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

La suma de los n primeros términos son:

$$s_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}$$

Además, si $|n| < 1$, la suma de los infinitos términos de la sucesión es:

$$s_\infty = \frac{a_1}{1 - r} \qquad \text{si } |r| < 1$$

PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

Una progresión geométrica es una sucesión en la que cada término, salvo el primero, se obtiene multiplicando el anterior por una cantidad fija **r**, llamada **razón** de la progresión.

Ejemplo: 5, 15, 45, 135, 405, … es una progresión geométrica de razón 3. Cada término se obtiene multiplicando el anterior por 3.

$$a_1 = 5,\ a_2 = 5 \cdot 3 = 15,\ a_3 = 15 \cdot 3 = 45,\ \ldots$$

El término general de una progresión geométrica es: $\boldsymbol{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}}$

donde a_1 es el primer término, y r, la razón.

Si se conoce el primer término $a_1 = 5$ y la razón es $r = 3$, entonces podemos conocer el término general de esa sucesión:

$$a_n = 5 \cdot 3^{n-1}$$

Y cualquier valor concreto de la sucesión, por ejemplo, el término: a_5 es: $a_5 = 5 \cdot 3^{5-1} = 5 \cdot 3^4 = 5 \cdot 81 = 405$

CONVERGENCIA

Una sucesión a_n es **convergente** cuando tiene límite **finito**. El límite L de una sucesión es el número al que la sucesión se aproxima cada vez más. Se dice que la sucesión a_n converge a su límite L y se expresa por:

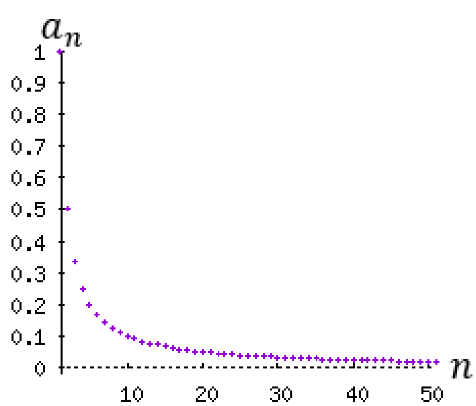
$$\lim_{n \to +\infty} a_n = L \neq \pm\infty$$

O bien, por $a_n \to L$.

Ejemplo: La sucesión $a_n = 1/n$ es convergente a 0. Sus primeros términos son:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= 0.5 \\ a_3 &= 0.333... \\ a_4 &= 0.25 \\ a_5 &= 0.2 \\ a_6 &= 0.166... \\ a_7 &= 0.142... \\ &... \end{aligned}$$

Cada término de la sucesión es menor que el anterior y cada vez se aproxima más a 0. El límite de la sucesión es $L = 0$. Representación de la sucesión $(n \leq 50)$:



IMPORTANTE. El límite de una sucesión es **único**. Es decir, si una sucesión converge, converge a un único punto.

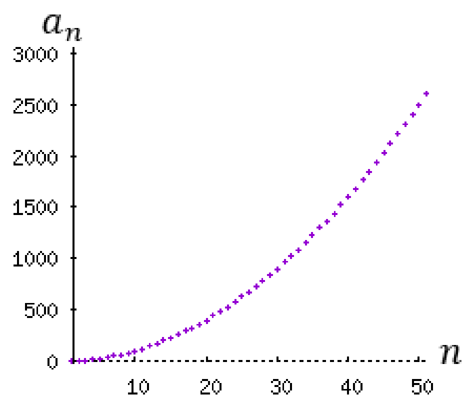
Una sucesión es **divergente** cuando no tiene límite. Es decir, cuando no existe ningún número finito al cual se aproxima. Cuando una sucesión es divergente, decimos que no existe su límite:

$$\nexists \lim_{n \to +\infty} a_n$$

Ejemplo: La sucesión $a_n = n^2$ es divergente. Sus primeros términos son:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= 4 \\ a_3 &= 9 \\ a_4 &= 16 \\ &... \end{aligned}$$

Representación de la sucesión $(n \leq 50)$:



Se observa que la sucesión crece indefinidamente y no tiende a ningún valor.

Nota: en esta página consideramos la divergencia como la no existencia de límite y, por tanto, una sucesión puede ser convergente o no convergente (divergente). Sin embargo, algunos matemáticos consideran la divergencia como la tendencia a infinito. En este segundo caso, una sucesión puede ser convergente, divergente o no convergente ni divergente.

MONOTONÍA

Una sucesión a_n es **monótona creciente** (o simplemente **creciente**) cuando cada término es mayor o igual que el anterior: $a_{n+1} \geq a_n \, , \; \forall n \in \mathbb{N}$

Es **estrictamente creciente** si el signo es estricto: $a_{n+1} > a_n \, , \; \forall n \in \mathbb{N}$

Una sucesión a_n es **monótona decreciente** (o simplemente **decreciente**) cuando cada término es menor o igual que el anterior: $a_{n+1} \leq a_n \, , \; \forall n \in \mathbb{N}$

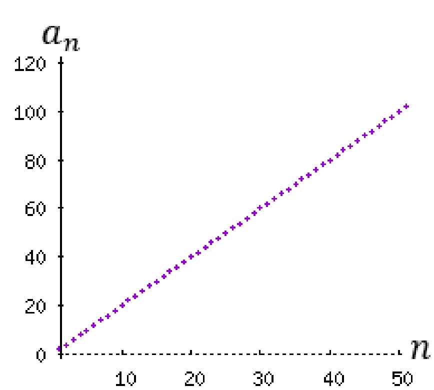
Es **estrictamente decreciente** si el signo es estricto: $a_{n+1} < a_n \, , \; \forall n \in \mathbb{N}$

Una sucesión a_n es constante cuando **todos** tus términos son iguales: $a_{n+1} = a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Ejemplo: La sucesión $a_n = 2n$ es estrictamente creciente. Sus primeros términos son:

$$a_1 = 2$$
$$a_2 = 4$$
$$a_3 = 6$$
$$a_4 = 8$$
$$\ldots$$

Representación de la sucesión $(n \leq 50)$:



ALTERNADA Y OSCILANTE

Una sucesión es **alternada** cuando cada término tiene el signo contrario que el del término que le precede.

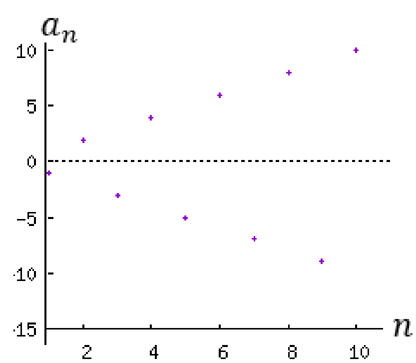
Ejemplo: La sucesión $a_n = (-1)^n \cdot n$ es alternada.

Calculamos sus primeros términos:

$$\begin{aligned} a_1 &= (-1)^1 \cdot 1 = -1 \\ a_2 &= (-1)^2 \cdot 2 = 2 \\ a_3 &= (-1)^3 \cdot 3 = -3 \\ a_4 &= (-1)^4 \cdot 4 = 4 \\ &\dots \end{aligned}$$

Observad que los signos se alternan: negativo, positivo, negativo, positivo...

Representación de la sucesión $(n \leq 10)$:



La potencia $(-1)^n$ es positiva cuando n es par y negativa cuando n es impar. Es el causante de la alternancia del signo.

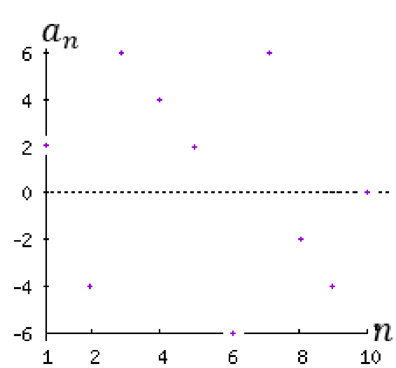
Una sucesión es **oscilante** cuando:

- ✓ no es alternada; y,
- ✓ no es creciente, ni decreciente ni constante.

Nota: en esta página consideramos que las sucesiones oscilantes no son alternadas ni viceversa. Sin embargo, algunos matemáticos consideran que las alternadas son un tipo de sucesiones oscilantes.

Ejemplo: La sucesión 2, -4, 6, 4, 2, -6, 6, -2, -4, 0, -2, 2, ... es oscilante.

Representación de la sucesión $(n \leq 10)$:



ACOTADA

Una sucesión a_n es **acotada superiormente** cuando ninguno de sus términos es mayor que algún número K:

$$a_n \leq K, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Una sucesión a_n es **acotada inferiormente** cuando ninguno de sus términos es menor que algún número K:

$$K \leq a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Una sucesión a_n es **acotada** cuando es acotada superior e inferiormente:

$$A \leq a_n \leq B, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

DISTANCIA AL LÍMITE

Si una sucesión a_n converge a L, la **distancia** entre el término a_m y el límite L es:

$$d_m = |a_m - L|$$

EJERCICIO 01. Resuelve cada uno de los siguientes problemas.

Problema 1. En una progresión aritmética, sabemos que el sexto término es 28 y que la diferencia es 5. Calcular el término general y los 5 primeros términos.

Problema 2. En una progresión geometría, sabemos que el primer término es 6 y el cuarto 48. Calcular el término general y la suma de los 5 primeros términos.

Problema 3. Encontrar el término general de la sucesión:

20, 19.3, 18.6, 17.9, …

¿Es aritmética o geométrica? Encontrar los términos: décimo (10), vigésimo (20) y trigésimo (30).

Problema 4. Encontrar el término general de la sucesión:

0.5, 0.25, 0.125, 0.0625, ...

¿Es aritmética o geométrica? Calcular los términos *n*- ésimos para los valores de *n* = 10, 100.

Se sabe que la suma de los infinitos términos de esta sucesión es 1 (ejercicio 26). Razonar cómo es posible que la suma de infinitos términos positivos no sea infinita.

Problema 5. En una progresión aritmética, sabemos que el primer término es 1 y la suma de los 10 primeros términos es 63. Calcular el término general.

Problema 6. En una progresión aritmética finita, el segundo término es -23 y el último 32. Si se sabe que hay 12 términos, calcular el término general.

Problema 7. La suma de tres términos consecutivos de una sucesión aritmética cuya diferencia es 11 vale 66. Encontrar los términos.

Problema 8. La suma de *n* números naturales consecutivos a partir de 55 (sin incluirlo) vale 738. Encontrar *n*.

Problema 9. La suma de 6 números impares consecutivos vale 120. Encontrar dichos números.

Problema 10. Demostrar que, en cualquier sucesión geométrica positiva, cada término es la raíz cuadrada del producto de su término anterior por su término siguiente. Es decir,

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$$

Problema 11. Una progresión geométrica comienza en 1 y tiene razón 2. Encontrar los tres términos consecutivos (de la sucesión) cuyo producto es 512.

Problema 12. Encontrar el término general de la sucesión:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, ...

¿Es aritmética o geométrica?

Problema 13. Encontrar el término general de la sucesión:

1, 4, 27, 256, 3125, ...

¿Es aritmética o geométrica?

Problema 14. Encontrar el término general de la sucesión:

1, -2, 4, -8, 16, ...

¿Es aritmética o geométrica?

Problema 15. Calcular la suma de los tres primeros términos de una sucesión geométrica de razón 0.5 sabiendo que su producto es 1000.

Problema 16. Considérese la sucesión dada por recurrencia:

$$a_1 = 1,$$

$$a_2 = 3,$$

$$a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1}$$

Calcular los términos que sean necesarios para poder deducir su término general.

Problema 17. El sueldo de un trabajador es de 950€ mensuales y cada año se incrementa en 50€ (cada mes). Calcular cuánto dinero ganará en los 10 años siguientes.

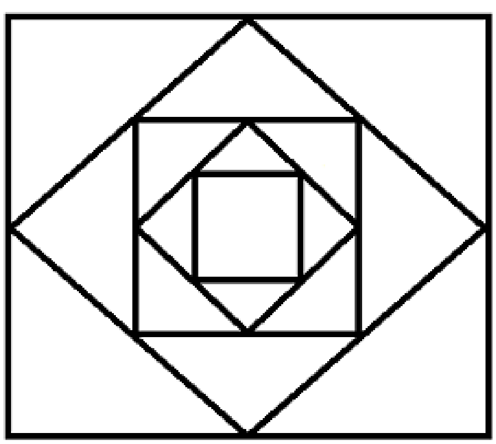
Problema 18. Calcular la suma de todos los números impares comprendidos entre 100 y 200.

Problema 19. Demostrar que la suma de los *n* primeros impares es n^2.

Problema 20. En una progresión aritmética, la suma de los dos primeros términos es 12 y la suma del primero con el tercero es 30. Hallar el término general y calcular la suma de los cinco primeros términos.

Problema 21. Calcular el valor del parámetro *a* para que los números *a+2, 3a+2, 9a-2* sean los tres primeros términos de una progresión geométrica.

Problema 22. En un cuadrado de lado 2 se unen los puntos medios de sus lados para obtener otro cuadrado inscrito. Se repite el proceso sucesivamente con los cuadrados obtenidos:



Calcular la sucesión cuyo término n-ésimo corresponde con la longitud del lado del cuadrado n-ésimo. ¿Qué tipo de sucesión es?

Problema 23. Calcular un número sabiendo que sus cinco cifras están colocadas en progresión aritmética, que la suma de todas ellas es 20 y que la primera es el doble de la tercera.

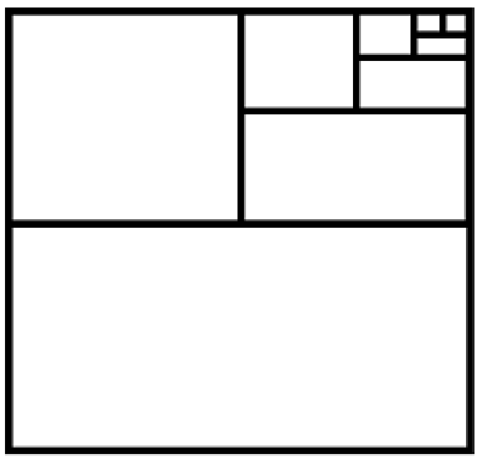
Problema 24. Calcular la suma de los múltiplos de 13 comprendidos entre los números 500 y 7800 inclusive.

Problema 25. Los dos primeros términos de una progresión aritmética son $(a - b)^2$ y $(a + b)^2$. Calcular la diferencia y la suma de los 5 primeros términos.

Problema 26. Demostrar que la suma infinita de la sucesión:

$$a_n = \frac{1}{2^n}$$

es 1 con la ayuda del siguiente diagrama que representa un cuadrado de lado 1.



Problema 27. Demostrar que la suma infinita de la progresión geométrica:

$$a_n = \frac{3}{2^{2n}}$$

es 1 con la ayuda del siguiente diagrama de cuadrados de lado 1 en los que el área amarilla del *n*-ésimo cuadrado vale lo mismo que el término *n*-ésimo de la progresión.

Problema 28. Según una leyenda, un rico brahmán ordenó a su sirviente, Sisa, que creara un juego para que pudiera entretenerse. Sisa le presentó el tablero de ajedrez y el brahmán quedó tan satisfecho que le dejó escoger su recompensa. Así pues, le pidió que le pagara con un grano de trigo por el primer casillero del tablero, dos por el segundo, cuatro por el tercero, ocho por el cuarto, etc. hasta llegar a los 64 casilleros. Calcular a cuántos granos de trigo ascendía la recompensa.

Problema 29. A las 9 de la mañana, una persona cuenta a tres amigos un secreto. Media hora después, cada uno de estos tres amigos cuenta el secreto a otras tres personas. Media hora más tarde, cada uno de éstos cuenta el secreto a otras tres personas y así sucesivamente.

Calcular cuántas personas saben el secreto a las 9 de la noche suponiendo que cada persona sólo cuenta el secreto a otras tres personas y a nadie más durante el día y que ninguno ha recibido la información varias veces.

Problema 30. Encontrar el valor de *n* para que se cumpla la igualdad: $2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 4094$

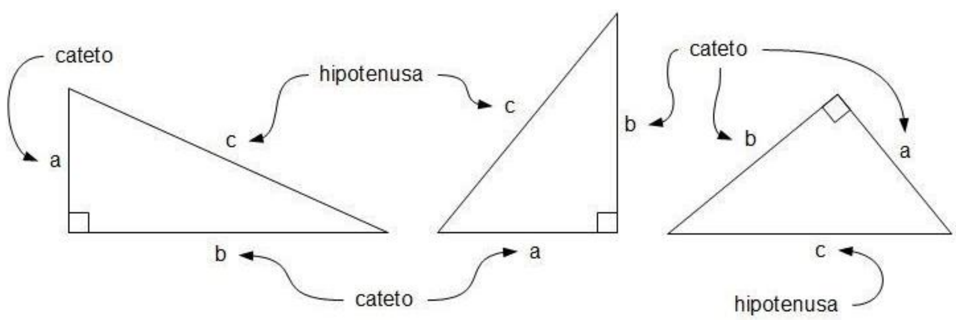
GEOMETRÍA PLANA

TEOREMA DE PITÁGORAS

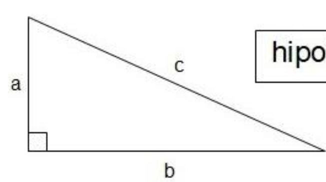
Es un teorema que nos permite relacionar los tres lados de un triángulo rectángulo, por lo que es de enorme utilidad cuando conocemos dos de ellos y queremos saber el valor del tercero.

También nos sirve para comprobar, conocidos los tres lados de un triángulo, si un triángulo es rectángulo, ya que si lo es sus lados deben cumplirlo. Como ya conoces, un triángulo rectángulo es aquél en el que uno de sus tres ángulos mide 90 grados, es decir, es un ángulo recto. Está claro que, si uno de los ángulos es recto, ninguno de los otros dos puede serlo, pues deben sumar entre los tres 180 grados.

En los triángulos rectángulos se distinguen unos lados de otros. Así, al lado mayor de los tres y opuesto al ángulo de 90 grados se le llama *hipotenusa*, y a los otros dos lados *catetos*.



Pues bien, el Teorema de Pitágoras dice que: *En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos*.



$$\boxed{\text{hipotenusa}^2 = \text{cateto}_1^{\,2} + \text{cateto}_2^{\,2}}$$

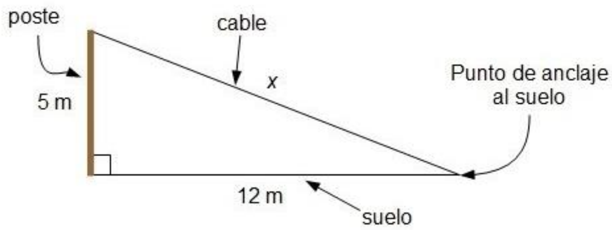
$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

Si lo expresamos de forma geométrica, el Teorema de Pitágoras quiere decir que el *área de un cuadrado de lado la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de otros dos cuadrados cuyos lados son cada uno de los catetos respectivamente.*

A continuación, veremos una aplicación práctica del Teorema de Pitágoras para calcular un lado desconocido en un triángulo rectángulo.

Se quiere sujetar un poste vertical de 5 metros de altura con un cable tirante desde su parte más alta hasta el suelo. Si la distancia desde el punto de anclaje del cable en el suelo a la base del poste es de 12 metros, ¿cuánto debe medir el cable?

Como el poste vertical es perpendicular al suelo, forma un ángulo recto con él. Si consideramos el propio poste, el cable y la distancia entre la base del poste y el punto de anclaje al suelo, tenemos un triángulo rectángulo:



Llamando *x* a la longitud del cable, y aplicando el Teorema de Pitágoras, se debe cumplir que:

$$x^2 = 5^2 + 12^2$$
$$x^2 = 25 + 144 = 169$$
$$x = \sqrt{169} = 13$$

Es decir, el cable debe medir 13 metros.

Antes de seguir, ten en claro que, la ecuación de segundo grado incompleta anterior tendría dos posibles soluciones, 13 y -13, pero al tratarse de longitudes, *no tiene sentido el resultado negativo*, por lo que solo he tenido en cuenta directamente el positivo. Esto es algo que haremos siempre al utilizar el Teorema de Pitágoras.

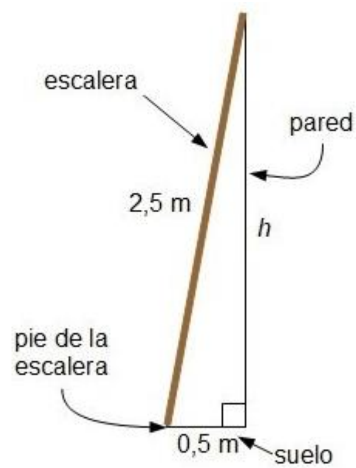
Veamos otro ejemplo donde lo que queramos calcular no sea la hipotenusa si no uno de los dos catetos.

Una escalera de 2,5 metros de longitud está apoyada en una pared vertical. Si el pie de la escalera está colocado a medio metro de dicha pared, ¿a qué altura llega la parte superior de la escalera?

Al ser la pared vertical, la pared y el suelo son perpendiculares. Si consideramos la escalera, la altura que alcanza ésta en la pared medida desde el suelo, y la distancia del pie de la escalera a la pared, tenemos un triángulo rectángulo (imagen derecha):

Llamando *h* a la altura que alcanza la escalera en la pared, y aplicando el Teorema de Pitágoras, se tiene que:

$$2{,}5^2 = 0{,}5^2 + h^2$$
$$h^2 = 2{,}5^2 - 0{,}5^2$$
$$h^2 = 6{,}25 - 0{,}25 = 6$$
$$h = \sqrt{6} = 2{,}45$$

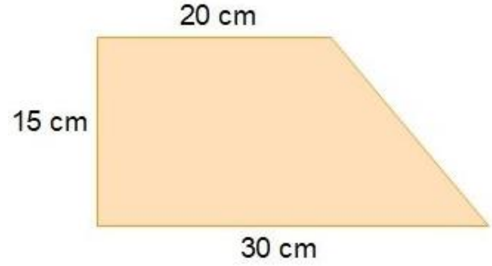


La escalera llega a una altura de 2,45 metros.

En los dos ejemplos que hemos visto hasta ahora formamos directamente un triángulo rectángulo, pero en muchas ocasiones la figura inicial es otra, y la construcción del triángulo rectángulo la hacemos para poder calcular alguna medida desconocida de ésta.

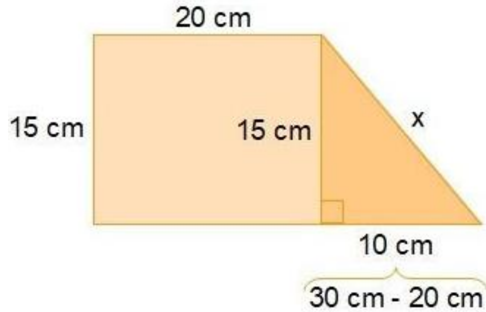
En el siguiente ejemplo tenemos un trapecio y vamos a utilizar un triángulo rectángulo para calcular uno de sus lados.

Calcula el perímetro del siguiente trapecio rectángulo (imagen derecha).



El perímetro del trapecio es igual a la suma de las longitudes de sus cuatro lados. Para calcularlo necesitamos primero calcular la longitud del lado inclinado, que desconocemos.

Llamando *x* al lado desconocido, podemos considerar el triángulo rectángulo que se muestra en la siguiente figura:



Tenemos, por tanto, un triángulo rectángulo de hipotenusa *x* y catetos de 15 y 10 cm. Aplicando el Teorema de Pitágoras:

$$x^2 = 10^2 + 15^2$$

$$x^2 = 100 + 225 = 325$$

$$x = \sqrt{325} = 18{,}03$$

El lado del trapecio que nos faltaba por saber mide 18,03 cm, por lo que el perímetro será:

$$P = 30 + 15 + 20 + 18{,}03 = 83{,}03 \text{ cm}$$

El perímetro del trapecio es de 83,03 cm.

Por último, veamos el siguiente ejemplo en donde veremos otra posible aplicación que tiene el teorema de Pitágoras: *comprobar, conocidos los tres lados de un triángulo, si es un triángulo rectángulo o no.*

Comprueba si los siguientes segmentos forman triángulos rectángulos:

- **a.** 25 cm, 24 cm, 7 cm.
- **b.** 12 cm, 15 cm, 4 cm.

Vamos con el primero.

Si es un triángulo rectángulo, se debe cumplir que el cuadrado del mayor de los tres segmentos sea igual a la suma de los cuadrados de los otros dos segmentos.

El cuadrado del segmento de mayor longitud (el segmento de 25 cm) es:

$$25^2 = 625$$

Y la suma de los cuadrados de los otros dos segmentos es:

$$24^2 + 7^2 = 576 + 49 = 625$$

Como podemos observar, *se cumple el Teorema de Pitágoras* y, por tanto, podemos afirmar que *los segmentos de 25 cm, 24 cm y 7 cm forman un triángulo rectángulo*.

Veamos ahora el segundo:

El cuadrado del segmento de mayor longitud, que en este caso es el segmento de 15 cm, es:

$$15^2 = 225$$

Y la suma de los cuadrados de los otros dos segmentos es:

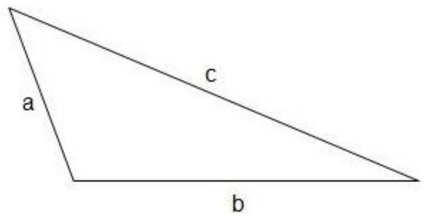
$$12^2 + 4^2 = 144 + 16 = 160$$

No son iguales, por lo que *no se cumple el Teorema de Pitágoras* y, en consecuencia, *el triángulo que forman los segmentos de 12 cm, 15 cm y 4 cm no es rectángulo.* De hecho, podemos afirmar que dichos segmentos *forman un triángulo obtusángulo* (tiene uno de sus ángulos obtusos, es decir, mayor de 90 grados).

¿Por qué?

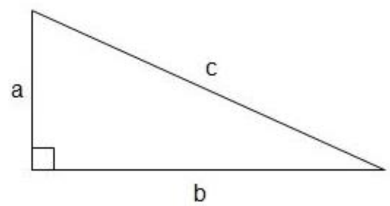
Es muy sencillo. Se cumple siempre que:

Si el cuadrado del lado de mayor longitud es mayor que la suma de los cuadrados de los otros dos lados se trata de un triángulo obtusángulo (triángulo con un ángulo obtuso, mayor de 90 grados).



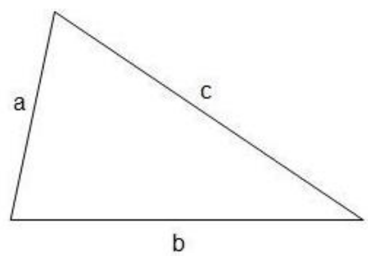
$$c^2 > a^2 + b^2$$

Si el cuadrado del lado de mayor longitud es *igual* que la suma de los cuadrados de los otros dos lados es un *triángulo rectángulo* (es lo que dice el Teorema de Pitágoras).



$$c^2 = a^2 + b^2$$

Y, si el cuadrado del lado de mayor longitud es *menor* que la suma de los cuadrados de los otros dos lados se trata entonces de un *triángulo acutángulo* (triángulo con los tres ángulos agudos, menores de 90 grados).



$$c^2 < a^2 + b^2$$

Y recordemos que:

El Teorema de Pitágoras solo se cumple en triángulos rectángulos, así que si el triángulo no es rectángulo no lo podemos utilizar.

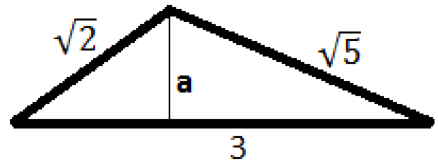
EJERCICIO 02. Resuelve cada uno de los siguientes problemas.

Problema 1. Calcular la hipotenusa del triángulo rectángulo de lados 3cm y 4cm.

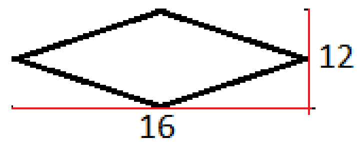
Problema 2. Si la hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 2cm y uno de sus lados mide 1cm, ¿cuánto mide el otro lado?

Problema 3. Calcular la hipotenusa del triángulo rectángulo cuyos lados miden $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$.

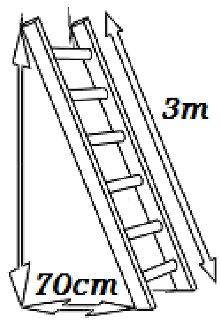
Problema 4. (dificultad muy alta). Calcular la altura del siguiente triángulo sabiendo que sus lados miden $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ y su base 3.



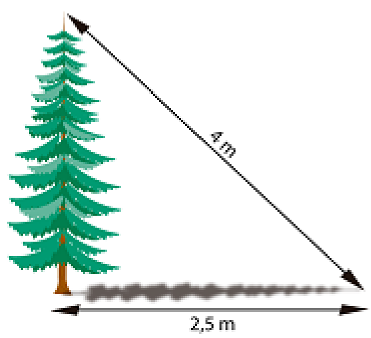
Problema 5. Calcular el perímetro del siguiente rombo si sabemos que sus diagonales (altura y anchura) miden 16 y 12.



Problema 6. Calcular la altura que podemos alcanzar con una escalera de 3 metros apoyada sobre la pared si la parte inferior la situamos a 70 centímetros de ésta.



Problema 7.



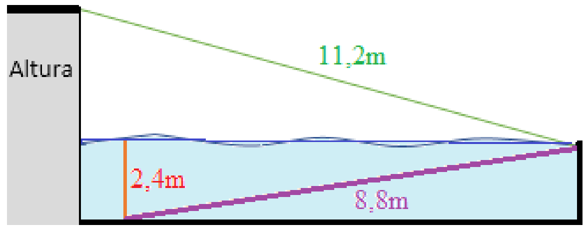
Al atardecer, un árbol proyecta una sombra de 2,5 metros de longitud. Si la distancia desde la parte más alta del árbol al extremo más alejado de la sombra es de 4 metros, ¿cuál es la altura del árbol?

Problema 8. La medida que se utiliza en los televisores es la longitud de la diagonal de la pantalla en unidades de pulgadas. Una pulgada equivale a 2,54 centímetros:

$$1'' = 2,54\ cm$$

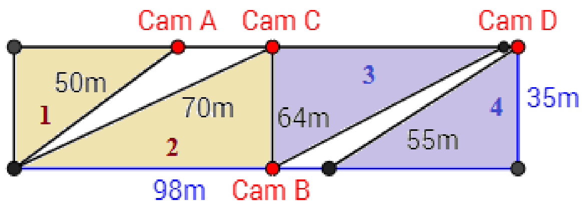
Si David desea comprar un televisor para colocarlo en un hueco de 96x79cm, ¿de cuántas pulgadas debe ser el televisor?

Problema 9. Un clavadista está entrenando en una piscina con una plataforma. Cuando realiza el salto, cae a una distancia de 1 metro de la plataforma sumergiéndose 2,4 metros bajo el agua. Para salir a la superficie, bucea hasta el final de la piscina siguiendo una línea transversal de 8,8 metros de longitud.



Si la longitud desde la parte superior de la plataforma al lugar en donde emerge del agua es de 11,2 metros, ¿cuál es la altura de la plataforma (desde el nivel del agua)?

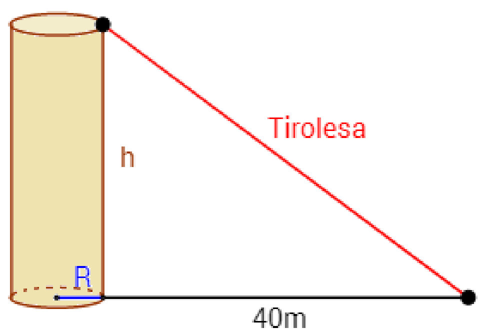
Problema 10. Un aparcamiento con forma rectangular de dimensiones 35x98 metros es controlado por cuatro cámaras de vigilancia.



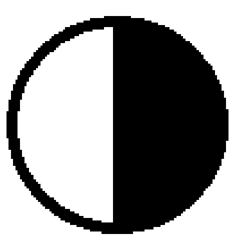
La cámara A observa el área 1; la cámara B, el área 2; la cámara C, el área 3; y la cámara D, el área 4.

Calcular el porcentaje del área del aparcamiento que no es vigilada por ninguna cámara.

Problema 11. Un parque de diversiones quiere construir una nueva atracción que consiste en una tirolesa que parte desde la base superior de una columna con forma cilíndrica. Si el radio de la columna es R = 2m y el área de su lateral es de $120m^2$, calcular la longitud del cable de la tirolesa para que alcance el suelo a 40m de distancia de la columna.



Problema 12 (dificultad alta). Distancias Sol-Tierra-Luna. Supongamos que la luna está en la fase de su primer cuarto, lo que significa que desde la Tierra la vemos del siguiente modo.



…siendo la mitad clara la que vemos, es decir, la iluminada por el Sol.

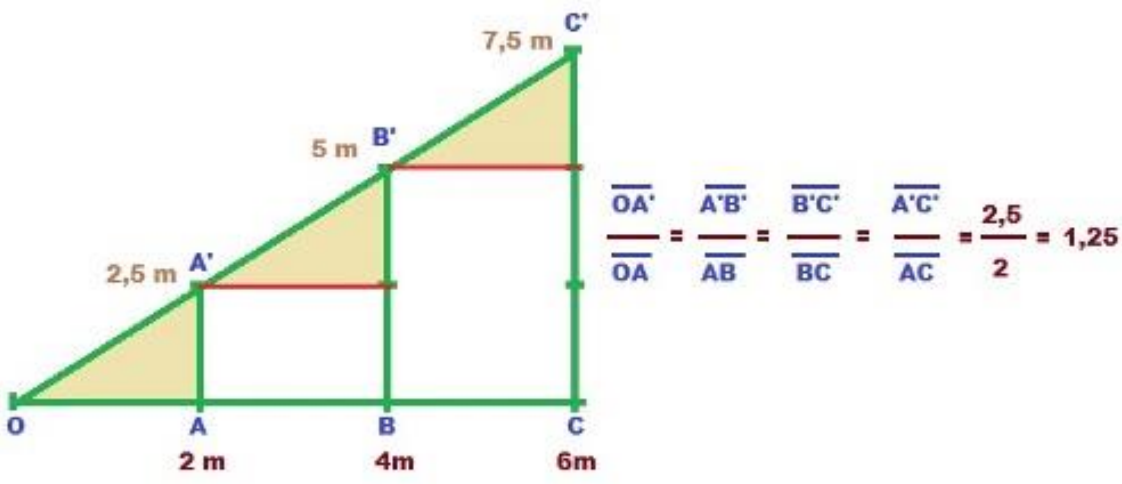
Sabemos que la distancia de la Tierra a la Luna es de 384100km y de la Tierra al Sol es de unos 150 millones de kilómetros. Se desea calcular la distancia de la Luna al Sol en esta fase (considerar las distancias desde los centros). Plantear el problema, pero no es necesario calcular el resultado.

TEOREMA DE THALES

Como puedes ver en la figura, haremos troceado el triángulo **OCC’** de forma que la base la hemos dividido en tres partes iguales de 2cm cada una.

Trazando las verticales por cada una de las divisiones obtenemos los puntos **A’, B’** y **C’** que determinan tres segmentos de igual longitud (2,5 m).

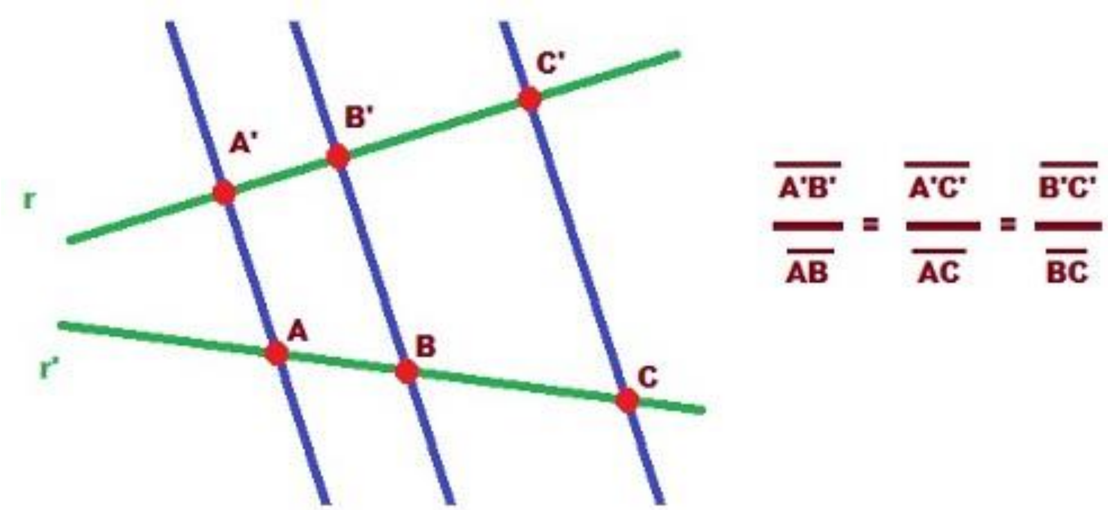
Por tanto, podemos observar que se cumple una proporción entre la longitud de los distintos segmentos que podemos formar en el lado **OC’** del triángulo y sus correspondientes al lado **OC,** tal y como puedes comprobarlo en las proporciones que se indican a la derecha de la figura.



Triángulo troceado. Imagen de Arturo Mandly en Flickr
Licencia Creative Commons by-nc-sa.

Pues bien, propiedad de proporcionalidad se puede generalizar y es lo que constituye el *Teorema de Thales.*

Teorema de Thales: si dos rectas cualesquiera son cortadas por rectas paralelas, los segmentos que determina en una de las rectas son proporcionales a los segmentos correspondientes de la otra.



Teorema de Thales. Imagen de Arturo Mandly en Flickr
Licencia Creative Commons by-nc-sa

Este teorema nos permite calcular, por tanto, la longitud de un segmento si conocemos su correspondiente en la otra recta y la proporción entre ambos.

EJERCICIO 03. Resuelve cada uno de los siguientes problemas.

Utilizamos la regla. Traza dos rectas ***r*** y ***r'*** cualesquiera (que no sean paralelas) y realiza lo siguiente:

Problema 01.

- ✓ Traza tres puntos **A**, **B** y **C** sobre la recta ***r*** y que estén separados **2cm A** y **B,** y **3cm B** y **C.**
- ✓ Traza tres rectas paralelas entre sí por los puntos **A**, **B** y **C,** y determina los puntos de corte correspondientes en la recta **r'**, **A'**, **B'** y **C'**.
- ✓ Mide cuidadosamente los distintos segmentos que se forman y comprueba que se cumple el **teorema de Thales.**
- ✓ Si trazaras un segmento de **6cm** en la recta ***r*** y trazaras dos paralelas por sus extremos a las anteriores ¿cuánto mediría el segmento que se formaría en la recta ***r'***?

Realiza un informe con los resultados obtenidos y envíaselo a tu catedrático(a).

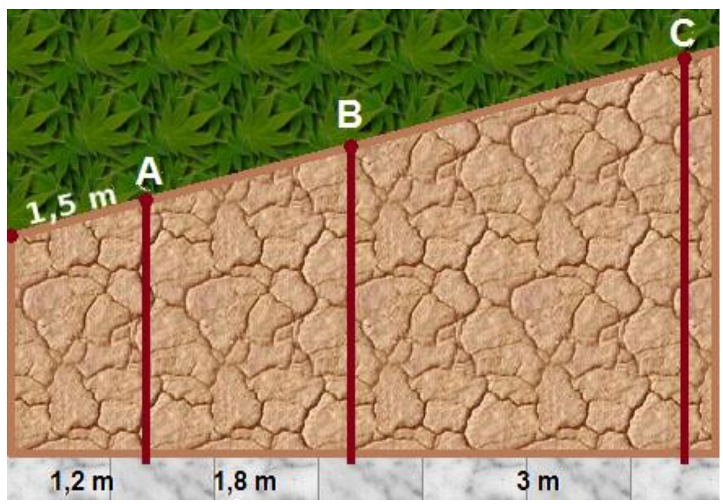
Como consecuencia del teorema de Thales, la proporción entre dos de los segmentos obtenidos por las rectas paralelas en una las rectas es la misma que sus correspondientes a las intersecciones en la otra.

En la siguiente escena puedes comprobar este resultado observado como toman el mismo valor las proporciones ***AB/BC*** *y* ***A'B'/B'C'***, para lo cual:

Mueve los círculos de las rectas *AB y A'B'*. Comprueba como se mantiene la igualdad de las proporciones.

Mueve los círculos de las rectas *AA', BB' y CC'.* Comprueba cómo se mantiene la igualdad de las proporciones.

Problema 02. En la imagen muestra una pared en la que hemos trazado rectas perpendiculares a su base indicada la distancia entre ellas. En la parte superior hemos colocado los puntos ***A, B*** *y* ***C.***



1. ¿Qué distancia hay entre los puntos *A* y *B?*
2.

a) 2 m
b) 2,5 m
c) 2,25 m

2. ¿Qué distancia hay entre los puntos *B y C?*

a) 4,5 m
b) 3,75 m
c) 4,25 m

3. ¿Qué distancia hay entre los puntos A y C?

a) 600 cm
b) 550 cm
c) 625 cm

TEOREMA DE EUCLIDES

De **Euclides** (330 a.C. al 227 a.C.) se sabe muy poco, con certeza, acerca de su vida. Su gran reputación se debe sin duda a su obra titulada **Los Elementos Geométricos**, conocida simplemente por **Los Elementos.** Además de estas y otras obras, Euclides escribió **Los Datos** que trata de la resolución de problemas, dándose elementos de la figura y determinándose otros.

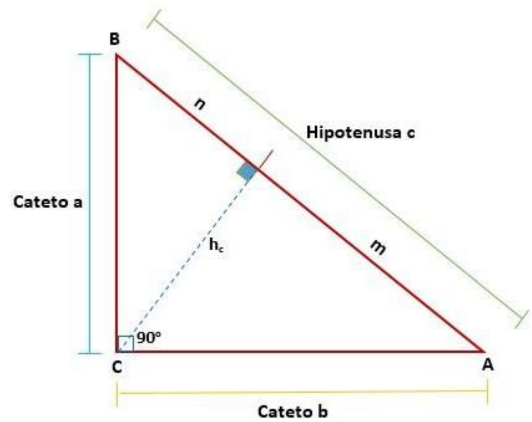
Escanea el Código QR e ingresa al vídeo tutorial para aprender más sobre el tema.

Los Porismos es una de sus obras perdidas; se cree que trataba de los Lugares Geométricos y de proposiciones sobre transversales. Muchos piensan que esta ha sido la mejor obra de Euclides. A continuación, se presentan dos Teoremas de Euclides, uno referido a un cateto (en un triángulo rectángulo) y otro referido a la altura.

1. Teorema de la altura.
2. Teorema de los catetos.

Este teorema tiene una amplia aplicación. En la Antigüedad fue usado para calcular alturas o distancias, representando un gran avance para la trigonometría.

Actualmente es aplicado en diversas áreas que se basan en la matemática, como ingeniería, física, química y astronomía, entre muchas otras áreas.

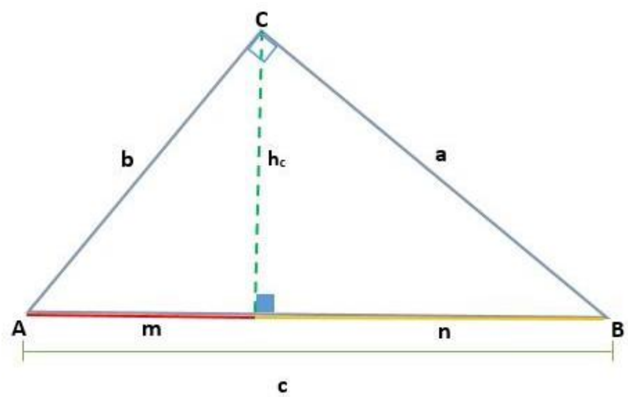


TEOREMA DE LA ALTURA

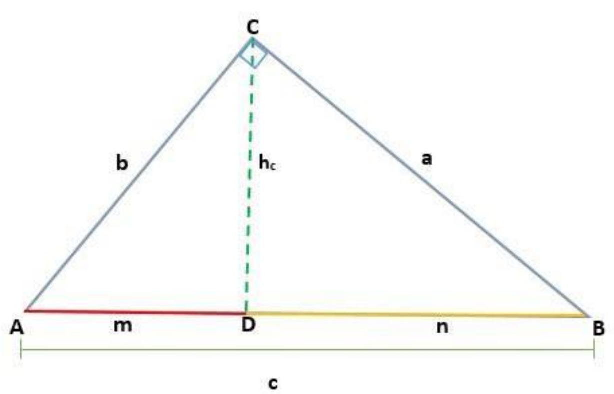
En este teorema se establece que en cualquier triangulo rectángulo, la altura trazada desde el ángulo recto con respecto a la hipotenusa es la media proporcional geométrica (el cuadrado de la altura) entre las proyecciones de los catetos que determina sobre la hipotenusa.

Es decir, el cuadrado de la altura será igual a la multiplicación de los catetos proyectados que forman la hipotenusa:

$$h_c{}^2 = m \times n$$



Demostración. Dado un triángulo ***ABC***, que es rectángulo en el vértice **C**, al trazar la altura se generan dos triángulos rectángulos semejantes, ***ADC*** y ***BCD***; por lo tanto, sus lados correspondientes son proporcionales:



De tal forma que la altura $\boldsymbol{h_c}$ que corresponde al segmento ***CD***, corresponde a la hipotenusa ***AB = c***, así se tiene que:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BD}}$$

A su vez, esto corresponde a:

$$\frac{h_c}{n} = \frac{m}{h_c}$$

Despejando la hipotenusa (***h_c***), para multiplicar los dos miembros de la igualdad, se tiene que:

$$h_c \times h_c = m \times n \qquad {h_c}^2 = m \times n$$

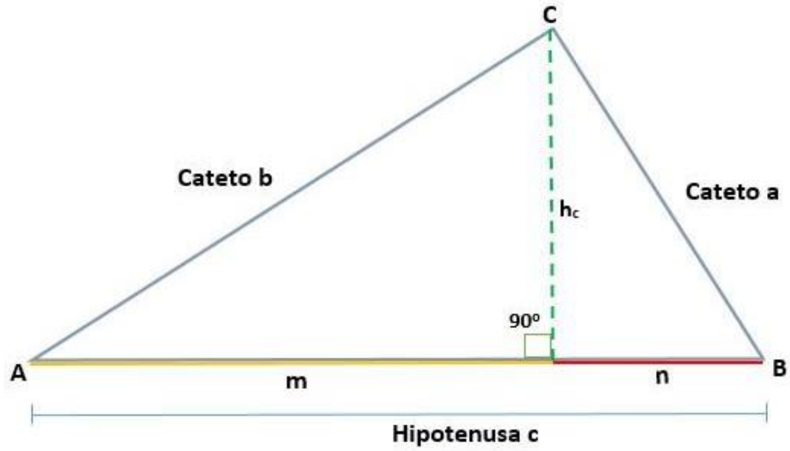
Así, el valor de la hipotenusa es dado por:

$$h_c = \sqrt{m * n}$$

TEOREMA DE LOS CATETOS

En este teorema se establece que, en todo triangulo rectángulo, la medida de cada cateto será la media proporcional geométrica (el cuadrado de cada cateto) entre la medida de la hipotenusa (completa) y la proyección de cada uno sobre este:

$$b^2 = c \times m \qquad a^2 = c \times n$$



Demostración. Dado un triángulo ***ABC***, que es rectángulo en el vértice ***C***, de tal forma que su hipotenusa es ***c***, al trazar la altura ***(h)*** se determinan las proyecciones de los catetos ***a*** y ***b***, que son los segmentos ***m*** y ***n*** respectivamente, y que se encuentran sobre la hipotenusa.

Así, se tiene que la altura trazada sobre el triángulo rectángulo ***ABC*** genera dos triángulos rectángulos semejantes, ***ADC*** y ***BCD***, de forma que los lados correspondientes son proporcionales, así:

DB = n, que es la proyección del cateto ***CB*** sobre la hipotenusa.
AD = m, que es la proyección del cateto ***AC*** sobre la hipotenusa.

Entonces, la hipotenusa c es determinada por la suma de los catetos de sus proyecciones:

$$c = m + n$$

Por la semejanza de los triángulos ***ADC*** y ***BCD***, se tiene que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{DB}}$$

Lo anterior es lo mismo que:

$$\frac{c}{a} = \frac{a}{n}$$

Despejando el cateto ***"a"*** para multiplicar los dos miembros de la igualdad, se tiene que:

$$a \times a = c \times n \qquad a^2 = c \times n$$

Así, el valor del cateto ***"a"*** es dado por:

$$a = \sqrt{c * n}$$

De igual forma, por la semejanza de los triángulos ***ACB*** y ***ADC***, se tiene que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}$$

Lo anterior es igual ***a***:

$$\frac{c}{b} = \frac{b}{m}$$

Despejando el cateto ***"b"*** para multiplicar los dos miembros de la igualdad, se tiene que:

$$b \times b = c \times m \qquad b^2 = c \times m$$

Así, el valor del cateto "b" es dado por:

$$b = \sqrt{c * m}$$

RELACIÓN ENTRE LOS TEOREMAS DE EUCLIDES

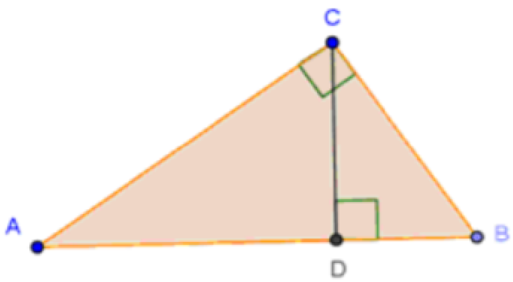
Los teoremas con referencia a la altura y los catetos se relacionan entre sí porque la medida de ambos se hace respecto a la hipotenusa del triángulo rectángulo. A través de la relación de los teoremas de Euclides el valor de la altura también puede ser hallado; eso es posible despejando los valores de m y n del teorema de los catetos y se reemplazan en el teorema de la altura. De esa forma se cumple que la altura es igual a la multiplicación de los catetos, divididos entre la hipotenusa:

$$b^2 = c \times m$$
$$m = b^2 \div c$$
$$a^2 = c \times n$$
$$n = a^2 \div c$$

En el teorema de la altura se reemplaza m y n:

$${h_c}^2 = m \times n$$
$${h_c}^2 = (b^2 \div c) \times (a^2 \div c)$$
$$h_c = (b^2 \times a^2) \div c$$

EJERCICIO 04. Resuelve los siguientes ejercicios de acuerdo con la siguiente figura:



1) AD = 3,6 cm.; BD = 6,4 cm.; AC = ?

Solución:

Lado c= AD +BD =3,6 cm. + 6,4 cm = 10 cm

Usando $\boxed{AC^2 = AD \bullet c}$ se obtiene $AC^2 = 3{,}6cm \bullet 10cm = 36cm^2$. Luego: AC =6cm.

2) BD = 3,2 m.; AB = 5 m.; BC = ?
3) AD = 2 cm.; BD = 4 cm.; CD = ?
4) AD = 16 cm.; AB = 52 cm.; CD = ?
5) AB = 12 cm.; AD = 9 cm.; BC = ?
6) AC = 5 cm.; BC = 10 cm. = CD = ?
7) CD = 2 m.; AC = 5 m.; BC = ?
8) AC = 12 cm.; BC = 9 cm.; CD = ?
9) BD = 6m.; CD = 5 m.; AB = ?
10) AB = 10 cm.; AC = (p + 2) cm.; BC = 2p cm.; CD = ?

GEOMETRÍA Y SUS APLICACIONES

La Geometría estudia las formas de las figuras y los cuerpos geométricos. En la vida cotidiana encontramos modelos y ejemplificaciones físicas de esos objetos ideales de los que se ocupa la Geometría, siendo muchas y variadas las aplicaciones de esta parte de las matemáticas.

Una de las principales fuentes de estos objetos físicos que evocan figuras y cuerpos geométricos está en la propia Naturaleza. Multitud de elementos naturales de distinta especie comparten la misma forma, como ocurre con las formas en espiral (conchas marinas, caracoles, galaxias, hojas de los helechos, disposición de las semillas de girasol, etc.). Igualmente encontramos semejanzas entre las ramificaciones de los árboles, el sistema arterial y las bifurcaciones de los ríos, o entre los cristales, las pompas de jabón y las placas de los caparazones de las tortugas.

Fuente: https://www.ngenespanol.com

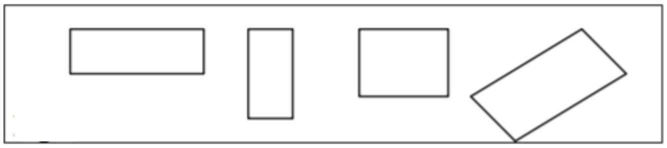
La Naturaleza, en contextos diferentes, utiliza un número reducido de formas parecidas, y parece que tuviese predilección por las formas serpenteantes, las espirales y las uniones de 120º. Pensemos en la disposición hexagonal perfecta de las celdillas de los panales de las abejas, siendo su interior, poliedros que recubren el espacio, como el rombododecaedro.

El ser humano refleja en su quehacer diario y en sus obras de arte esas imágenes ideales que obtiene de la observación de la Naturaleza: realiza objetos de cerámica, dibujos, edificios y los más diversos utensilios proyectando en ellos las figuras geométricas que ha perfeccionado en la mente.

El entorno artístico y arquitectónico ha sido un importante factor de desarrollo de la Geometría. Así desde la construcción de viviendas o monumentos funerarios (pirámides de Egipto), hasta templos de los más diversos estilos han impulsado constantemente el descubrimiento de nuevas formas y propiedades geométricas. Muchas profesiones, además de los matemáticos, arquitectos e ingenieros necesitan y usan la Geometría: albañiles, ceramistas, artesanos (objetos de taracea, trabajos de cuero, repujados de latón, tejedores de alfombras, bordadoras, encajes de bolillos, etc.), decoradores, coreógrafos, diseñadores de muebles, etc. Todos ellos de una forma más o menos consciente, utilizan el espacio y las formas geométricas. También se encuentra la geometría en los juegos: billar (bolas y mesa en forma de doble cuadrado, con rombos en los bordes), parchís, ajedrez, la rayuela, el juego de los barcos, así como multitud de juegos de ordenador. El mundo de los deportes está repleto de figuras geométricas: fútbol (el rectángulo del campo, las áreas, el balón, las porterías, etc.), baloncesto (canastas, zonas, campo, etc.), tenis, rugby, béisbol, etc. Seguramente el lector puede completar estas listas de situaciones y ámbitos donde podemos encontrar objetos geométricos, y cuyo manejo facilita el conocimiento de tales ámbitos.

SITUACIONES INTRODUCTORIAS

A. Lista mínima de propiedades En la figura adjunta hay representados diversos rectángulos.



Listar todas las posibles propiedades de los rectángulos.

Por ejemplo:

- ✓ Tiene cuatro lados
- ✓ Los lados opuestos son paralelos
- ✓ Etc.

Elaborar una lista mínima de propiedades de tal manera que si una figura tiene esas propiedades podemos decir que es un rectángulo.

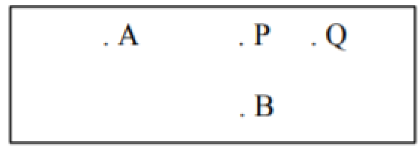
B. Deducción informal

Demostrar si los enunciados siguientes son verdaderos o falso:

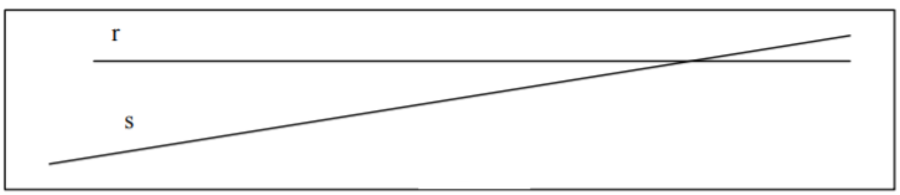
- ✓ Si una figura (F) es un cilindro, entonces es un prisma.
- ✓ Si F es un prisma, entonces es un cilindro.
- ✓ Si F es un cuadrado, entonces es un rombo.
- ✓ Todos los paralelogramos tienen diagonales congruentes.
- ✓ Todos los cuadriláteros con diagonales congruentes son paralelogramos.
- ✓ Si dos rectángulos tienen la misma área, entonces son congruentes.
- ✓ Todos los prismas tienen un plano de simetría.
- ✓ Todos los prismas rectos tienen un plano de simetría.
- ✓ Si un prisma tiene un plano de simetría, entonces es un prisma recto.

PUNTOS, RECTAS, PLANOS Y ESPACIO

En el cuadro adjunto hemos escrito las letras **A**, **B**, **P**, **Q** a la derecha de una diminuta marca redondeada. Decimos que dichas marcas son *puntos*. Igualmente diríamos que se trata de puntos si en lugar de usar una impresora láser para hacer la impresión usáramos un lápiz con una punta gruesa, o un lápiz imaginario que dibuja puntos tan finos que sean prácticamente imperceptibles.



El punto, como objeto o figura geométrica, se considera que no tiene dimensiones y se usa para indicar una posición en el espacio. En el cuadro siguiente decimos que hay representadas dos líneas rectas designadas con las letras *r* y *s*:



Pero al objeto o figura geométrica *línea recta* se le atribuyen unas características que realmente no tienen los trazos marcados en el cuadro. Se considera que las rectas son ilimitadas por ambos extremos, así como que no tienen ningún espesor, lo que hace imposible "representar" las rectas. La característica de ser ilimitadas por ambos extremos se suele indicar marcando flechas en cada extremo. Otras experiencias que sugieren la idea de recta pueden ser un hilo tirante, el borde una regla, etc.

Se considera que dos puntos determinan una y sólo una línea recta que contiene a dichos puntos. Tres o más puntos pueden determinar varias rectas, pero si están contenidas en una recta se dice que son colineales.

Tres puntos no colineales se dice que determinan un plano, figura geométrica que suele ser evocada por una hoja de papel apoyada sobre una mesa, la propia superficie de una mesa, la pizarra, etc. De nuevo al objeto o figura geométrica designada con la palabra 'plano' se le atribuyen unas características ideales que no tienen tales objetos perceptibles, como no tener límites en ninguna dirección, ni tampoco ningún espesor.

Se dice que las rectas y los planos son conjuntos de puntos. Se considera el *espacio* como el conjunto de todos los puntos. Cualquier subconjunto de puntos del espacio se considera como una *figura geométrica.* El objetivo de la geometría será describir, clasificar y estudiar las propiedades de las figuras geométricas. Dos rectas contenidas en el plano que no tienen ningún punto en común se dice que son *paralelas.* Si tienen un punto en común se dice que son *concurrentes.* Una recta que corta a otras dos se dice que es una *transversal.*

Todo punto **P** divide a una recta que lo contiene en dos subconjuntos formados por los puntos que están situados a un mismo lado respecto de **P**. Estos subconjuntos se dice que son *semirectas* o rayos de extremo **P**. También se habla de semiplanos: cada una de las dos partes en que queda dividido un plano al quitar una recta de este. También serán semiplanos abiertos o cerrados, según que se incluya o no la recta a partir de la cual se forma.

EJERCICIO 05. Resuelve lo siguiente.

En cuántas partes queda dividido un plano al quitarle:

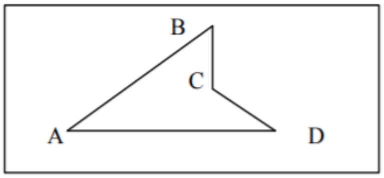
- **a)** Dos rectas paralelas;
- **b)** Dos rectas concurrentes;
- **c)** Tres rectas, dos de las cuales son paralelas;
- **d)** Tres rectas concurrentes.?

¿Se puede separar un plano en cinco partes quitando:

- **a)** tres rectas;
- **b)** cuatro rectas.?

¿Cuál es el máximo número de partes en que se puede cortar un plano por 7 rectas?

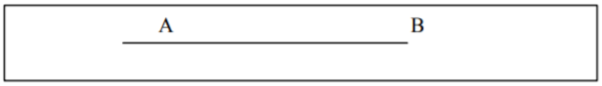
Describir el interior de la siguiente figura como intersección o unión de semiplanos:



Describir el interior de un tetraedro como intersección de semiespacios abiertos.

SEGMENTOS Y ÁNGULOS

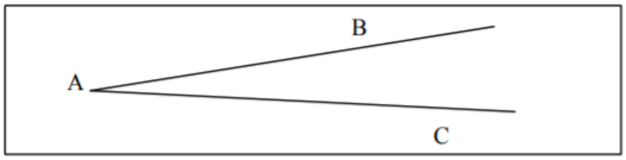
En el siguiente cuadro decimos que está representado el segmento AB, conjunto de puntos comprendidos entre los puntos A y B, que se dice son los extremos del segmento.



La distancia entre los puntos **A** y **B** se dice que es la longitud del segmento **AB**. Dos segmentos **AB** y **CD** se dice que son *congruentes* si tienen la misma longitud.

Un segmento se puede definir también como la intersección de dos semirectas contenidas en una misma recta. Los segmentos pueden ser abiertos o cerrados según que en las semirectas se consideren incluidos o no los extremos.

Un *ángulo* se puede considerar como la intersección de dos semiplanos cerrados, obtenidos a partir de dos rectas incidentes. Ambas semirectas son los lados del ángulo y el punto de concurrencia es el vértice. También se usa la palabra ángulo para designar a la figura geométrica formada solamente por el conjunto de los lados y el vértice. La figura siguiente representa el ángulo formado por las semirectas **AB** y **AC**; se suele designar como ángulo:

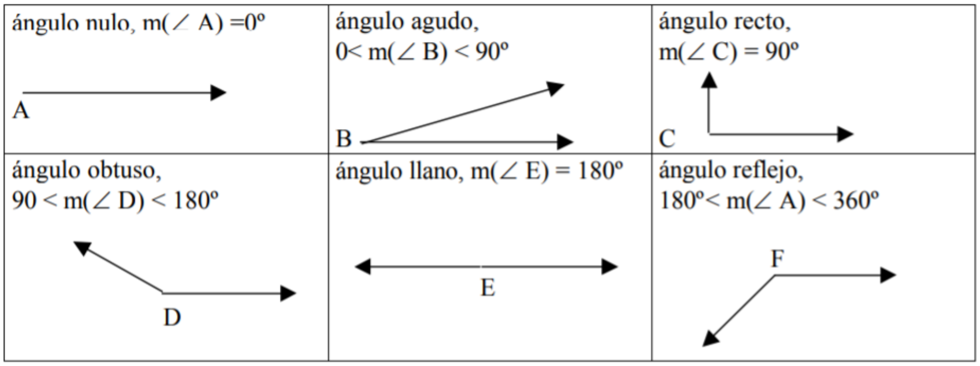


$\angle$BAC o también como $\angle$CAB.

Un ángulo cuyos lados no están sobre la misma recta separa al plano en dos partes, el *interior* y el *exterior* del ángulo. El subconjunto de puntos del plano formados por todos los segmentos que unen puntos situados sobre los lados **AB** y **AC** forman el interior del ángulo, y su complementario respecto del plano será el exterior.

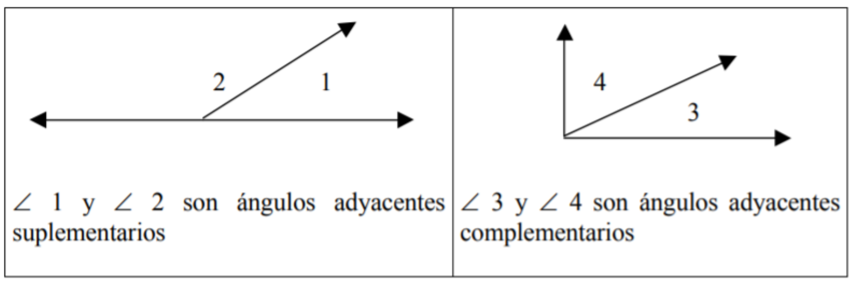
El tamaño de un ángulo se mide por la cantidad de rotación requerida para girar uno de los lados del ángulo, tomando como centro de giro el vértice, para que coincida con el otro lado. Como unidad de medida habitual se usa el grado, la 360 ava parte de la abertura de la circunferencia. La medida de un ángulo $\angle$ A la indicaremos por $m(\angle A)$.

Clasificación de los ángulos por su medida:

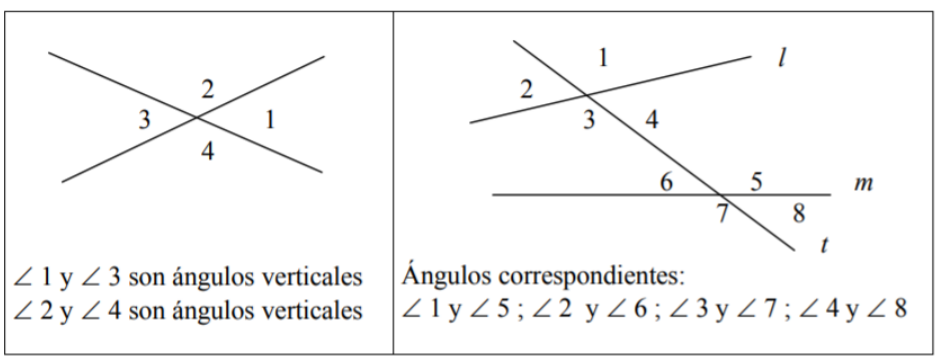


Pares de ángulos y teoremas relacionados:

1. Dos ángulos con medidas m_1 y m_2 se dice que son complementarios si y sólo si $m_1 + m_2 = 90º$. Se dice que son suplementarios si $m_1 + m_2 = 180º$.
2. Dos ángulos que tienen un lado común y cuyos interiores no se solapan se dice que son adyacentes.



3. Dos ángulos se llaman verticales cuando sus cuatro lados forman dos rectas que se cortan.
4. Cuando dos líneas *l* y *m* se cortan en dos puntos por otra recta transversal *t* se forman cuatro pares de ángulos que se llaman ángulos correspondientes.



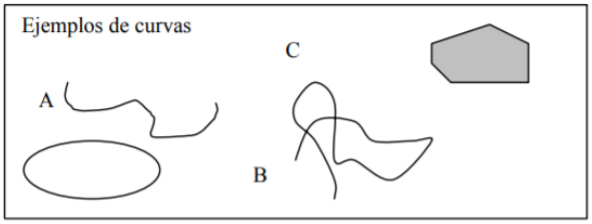
EJERCICIO 06. Intenta probar los siguientes teoremas sobre ángulos:

1) Si dos rectas paralelas se cortan por una transversal los ángulos correspondientes son iguales.
2) Si dos rectas del plano son cortadas por una transversal de manera que los ángulos correspondientes son iguales, entonces las rectas son paralelas.
3) Dos rectas cortadas por una transversal son paralelas si y sólo si un par de ángulos alternos internos son congruentes.
4) Las bisectrices de dos ángulos suplementarios adyacentes forman un ángulo recto.
5) Medida de los ángulos de un triángulo: la suma de los ángulos interiores de cualquier triangulo es un ángulo llano.

CURVAS Y POLÍGONOS EN EL PLANO

CURVAS Y REGIONES

Una *curva* plana se puede describir de manera intuitiva e informal como el conjunto de puntos que un lápiz traza al ser desplazado por el plano sin ser levantado. Si el lápiz nunca pasa dos veces por un mismo punto se dice que la curva es *simple.* Si el lápiz se levanta en el mismo punto en que comenzó a trazar se dice que la curva es *cerrada.*



Si el único punto por el que el lápiz pasa dos veces es el del comienzo y final del trazado se dirá que la curva es *cerrada y simple.* Se requiere que las curvas tengan un punto inicial y otro final, por lo que las rectas, semirrectas y ángulos no son curvas.

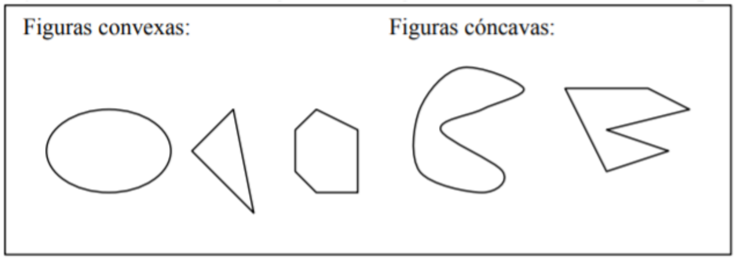
TEOREMA DE LA CURVA DE JORDAN

Una curva cerrada simple separa los puntos del plano en tres subconjuntos disjuntos: la propia curva, el interior, y el exterior de la curva. Esta propiedad parece obvia en casos sencillos, pero enunciada en términos generales requiere una demostración matemática nada fácil. Incluso la demostración dada por el matemático francés Camile Jordan (1838-1922) que enunció este teorema era incorrecta.

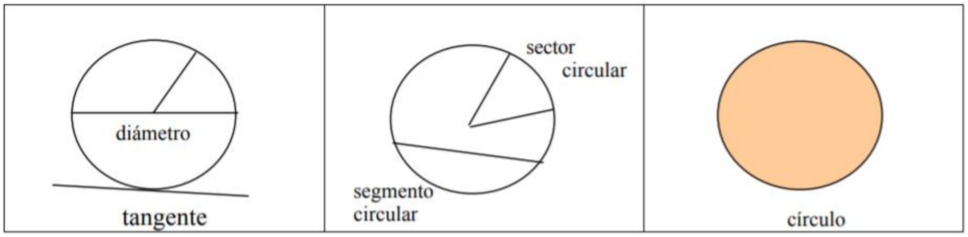
El interior y el exterior de una curva cerrada simple se designan también como regiones. De manera más general el conjunto complementario, respecto del plano que las contiene, de conjuntos de rectas, semirectas y curvas está compuesto de una o más regiones. Por ejemplo, una recta separa al plano en dos regiones llamadas *semiplanos.* Un ángulo, si no es nulo o llano, separa al plano en dos regiones llamadas el interior y el exterior del ángulo.

CURVAS Y FIGURAS CONVEXAS

Una figura se dice que es *convexa,* si y sólo si, contiene el segmento **PQ** para cada par de puntos **P** y **Q** contenidos en la figura. Las figuras no convexas se dice que son cóncavas.



La *circunferencia* es una curva cerrada, convexa, tal que la distancia de cualquiera de sus puntos a otro fijo es constante. El punto fijo se llama centro de la circunferencia y la distancia constante se llama radio (también se llama radio al segmento que uno el centro con cualquier punto de la circunferencia; un diámetro es cualquier segmento que une dos puntos de la circunferencia pasando por el centro.



CURVAS POLIGONALES Y POLÍGONOS

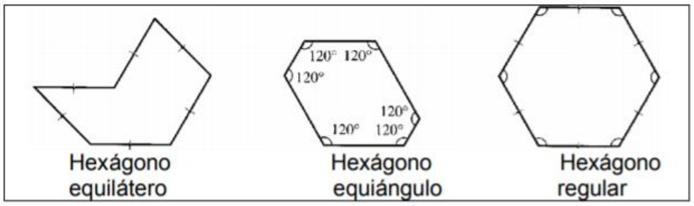
Una curva simple que está formada por segmentos unidos por sus extremos se dice que es una *curva poligonal*. Si dicha curva es cerrada se dice que es un *polígono*: a los segmentos que la forman se llaman *lados* y a los extremos de esos segmentos, *vértices*. Si todos los lados de un polígono son iguales se dice que es regular.

En principio, nada se dice sobre si las curvas poligonales, y los polígonos, han de ser planos. También se puede hablar de poligonales y polígonos espaciales, aunque el estudio de los polígonos se suele restringir a los polígonos contenidos en el plano.

Los polígonos se nombran según el número de lados o vértices que tienen (triángulo, cuadrado, pentágono, hexágono, etc.). Las semirectas que contienen a dos lados concurrentes en un vértice determinan un ángulo del polígono. En un polígono convexo el interior del polígono será la intersección de los interiores de los ángulos del polígono. Si en un ángulo interior de un polígono sustituimos una de las semirectas por su opuesta se obtiene otro ángulo distinto llamado *ángulo exterior.*

POLÍGONOS REGULARES

1. Un polígono que tiene todos sus lados iguales se dice que es *equilátero* (todos sus lados son congruentes).
2. Un polígono convexo cuyos ángulos interiores son todos congruentes se dice que es *equiángulo.*
3. Un polígono convexo que es tiene sus lados y sus ángulos iguales se dice que es *regular.*
4. En un polígono regular de n lados, cualquier ángulo con vértice en el centro y cuyos lados contienen vértices adyacentes del polígono se dice que es un ángulo central del polígono.



EJERCICIO 07. Lee detenidamente el siguiente párrafo. Debes responder o solucionar lo que se te pide luego de este:

Un material didáctico conocido como geoplano es una herramienta útil en el estudio de los polígonos. Un geoplano 5x5 consiste en una plancha de madera y 25 clavos dispuestos según una malla cuadrada, como se indica en la figura. Se emplean gomas de colores para formar diversos polígonos tomando los clavos como sus vértices.

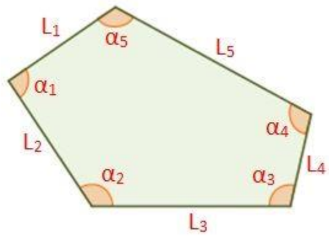
¿Cuántos cuadrados se pueden formar en este geoplano?

Probar que en un polígono regular de n lados,

a) cada ángulo interior mide: (n-2). 180º/n
b) cada ángulo exterior mide: 360º/n
c) cada ángulo central mide: 360º/n

Un rectángulo ha sido dividido en dos partes congruentes. ¿Qué forma pueden tener las partes formadas?

POLÍGONOS IRREGULARES

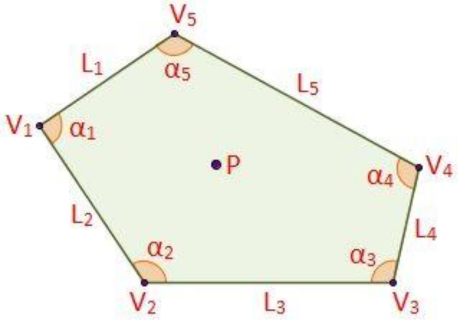


Un polígono irregular es un polígono con los lados y ángulos desiguales.

Elementos del polígono irregular:

Se pueden distinguir algunos elementos del polígono irregular:

- ✓ **Punto interior** (*P*): es cualquier punto que está dentro del perímetro del polígono irregular.
- ✓ **Lados** (L_i): son los *n* segmentos que delimitan al polígono.



INFORMACIÓN (INCLUÍDA EN ESTE DOCUMENTO EDUCATIVO) TOMADA DE:

Libros/documentos:

1. Braun, E. (2011). Caos, fractales y cosas raras. Fondo de Cultura Economica.
2. Cabrera, V. M. (1974). Matemáticas modernas, Volume 3.
3. Daniel Hernandez, D. P. (2014). Matemática de 3er año. Caracas: Santillana.
4. Encyclopaedia Britannica, i. (1995). Enciclopedia hispánica: Macropedia. Encyclopedia Britannica Publishers.
5. Euclid, R. P. (1886). Euclid's Elements of Geometry.
6. Guardeño, A. J. (2000). El legado de las matemáticas: de Euclides a Newton, los genios a través de sus libros. Universidad de Sevilla.

Sitios web:

1. *https://www.geogebra.org/m/enwbSVbm*
2. *https://www.matesfacil.com/ESO/progresiones/convergente-divergente-oscilante-alternada-acotada-limite-creciente-decreciente-monotona-problemas-resueltos.html*
3. *https://www.macmillaneducation.es/wp-content/uploads/2018/10/cientifico_matematico_advantage_multimedia.pdf*
4. *https://www.matesfacil.com/ESO/progresiones/ejercicios-resueltos-sucesiones.html*
5. *https://matematicascercanas.com/2019/02/16/teorema-de-pitagoras/*
6. *https://www.matesfacil.com/pitagoras/problemas-resueltos-pitagoras.html*
7. *https://www.matesfacil.com/pitagoras/problemas-resueltos-pitagoras.html*
8. *https://www.profesorenlinea.cl/geometria/Teoremas_Euclides.html*
9. *https://www.lifeder.com/teorema-euclides/*
10. *https://matematicosingles.files.wordpress.com/2011/05/2-3-teoremaeuclides.pdf*
11. *https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/4_Geometria.pdf*
12. *https://www.universoformulas.com/matematicas/geometria/poligono-irregular/*