CBS

Colegio Bautista Shalom

Matemática 3
Tercero Básico
Primer Bimestre

Contenidos

PRODUCTOS NOTABLES

- ✓ CUADRADO DE LA SUMA DE DOS CANTIDADES O BINOMIO CUADRADO.
- ✓ CUADRADO DE LA DIFERENCIA DE DOS CANTIDADES.
- ✓ PRODUCTO DE LA SUMA POR LA DIFERENCIA DE DOS CANTIDADES.
- ✓ OTROS CASOS DE PRODUCTOS NOTABLES (O ESPECIALES).

FACTORIZACIÓN

- ✓ CASO FACTOR COMÚN MONOMIO.
- ✓ CASO TRINOMIO CUADRADO PERFECTO.
- ✓ CASO DIFERENCIA DE CUADRADOS.
- ✓ CASO TRINOMIO DE LA FORMA $AX^2 + BX + C$.
- ✓ CASO CUBO PERFECTO BINOMIOS (CUATRINOMIO).
- ✓ CASO SUMA O DIFERENCIA DE CUBOS PERFECTOS.

BINOMIO DE NEWTON

TRIÁNGULO DE PASCAL O DE TARTAGLIA

GEOMETRÍA

- ✓ GEOMETRÍA SÓLIDA.
- ✓ ¿QUÉ SON LOS CUERPOS GEOMÉTRICOS?
- ✓ POLIEDROS.
- ✓ CUERPOS REDONDOS.
- ✓ IDENTIFICACIÓN DE CARAS, ARISTAS Y VÉRTICES EN CUERPOS GEOMÉTRICOS.
  - LOS CUERPOS GEOMÉTRICOS.
  - CLASIFICACIÓN.
    - LOS PRIMAS.
    - LAS PIRÁMIDES.
    - LOS ORTOEDROS.
    - LOS POLIEDROS REGULARES.
    - EL CILINDRO.
    - EL CONO.
    - LA ESFERA.

NOTA: conforme vayas avanzando en tu aprendizaje debes realizar cada uno de los ejercicios. Copia y resuelve cada ejercicio en hojas bond (blancas) a lápiz y escribe las respuestas con lapicero negro. Sigue las instrucciones de tu catedrático(a).

PRODUCTOS NOTABLES

Sabemos que se llama **producto** al resultado de una multiplicación. También sabemos que los valores que se multiplican se llaman **factores**.

Se llama **productos notables** a ciertas **expresiones algebraicas** que se encuentran frecuentemente y que es preciso saber **factorizarlas** a simple vista; es decir, sin necesidad de hacerlo paso por paso.

Se les llama **productos notables** (también **productos especiales**) precisamente porque son muy utilizados en los ejercicios. A continuación, veremos algunas **expresiones algebraicas** y del lado derecho de la igualdad se muestra la forma de factorizarlas (mostrada como un **producto notable**).

CUADRADO DE LA SUMA DE DOS CANTIDADES O BINOMIO CUADRADO

$$\mathbf{a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2}$$

El cuadrado de la suma de dos cantidades es igual al cuadrado de la primera cantidad, más el doble de la primera cantidad multiplicada por la segunda, más el cuadrado de la segunda cantidad.

Demostración: (imagen derecha).

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = \overset{1}{a^2} + \overset{2}{ab} + \overset{3}{ab} + \overset{4}{b^2}$$

$$= a^2 + 2ab + b^2$$

Entonces, para entender de lo que hablamos, cuando nos encontramos con una expresión de la forma $\mathbf{a^2 + 2ab + b^2}$ debemos identificarla de inmediato y saber que podemos **factorizarla** como $\mathbf{(a + b)^2}$

CUADRADO DE LA DIFERENCIA DE DOS CANTIDADES

$$\mathbf{a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2}$$

El cuadrado de la diferencia de dos cantidades es igual al cuadrado de la primera cantidad, menos el doble de la primera cantidad multiplicada por la segunda, más el cuadrado de la segunda cantidad.

Demostración:

$$(a - b)^2 = (a - b)\ (a - b) = a^2 + b^2 - ab - ab = a^2 + b^2 - 2ab = a^2 - 2ab + b^2$$

Entonces, para entender de lo que hablamos, cuando nos encontramos con una expresión de la forma $\mathbf{a^2 - 2ab + b^2}$ debemos identificarla de inmediato y saber que podemos factorizarla como $\mathbf{(a - b)^2}$

PRODUCTO DE LA SUMA POR LA DIFERENCIA DE DOS CANTIDADES (o producto de dos binomios conjugados)

$$\mathbf{(a + b)(a - b) = a^2 - b^2}$$

El producto de la suma por la diferencia de dos cantidades es igual al cuadrado de la primera cantidad, menos el cuadrado de la segunda

Demostración: (imagen derecha).

$$(a + b)(a - b) = \overset{1}{a^2} + \overset{2}{ab} - \overset{3}{ab} + \overset{4}{b^2}$$

$$= a^2 - b^2$$

Entonces, para entender de lo que hablamos, cuando nos encontramos con una expresión de la forma:

$$\mathbf{(a + b)(a - b)}$$

…debemos identificarla de inmediato y saber que podemos factorizarla como: $\mathbf{a^2 - b^2}$

OTROS CASOS DE PRODUCTOS NOTABLES (O ESPECIALES)

Producto de dos binomios con un término común, de la forma:

$$\mathbf{x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)}$$

Demostración:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + ab + bx + ax = x^2 + ab + (a + b)x = x^2 + (a + b)x + ab$$

Veamos un ejemplo explicativo:

Tenemos la expresión algebraica

$$x^2 + 9x + 14$$

obtenida del producto entre (x **+** 2) (x **+** 7)

¿Cómo llegamos a la expresión?

- **a)** El cuadrado del término común es (x)(x) **=** $\mathbf{x}^2$
- **b)** La suma de términos no comunes multiplicada por el término común es (2 **+** 7)x **= 9 x**
- **c)** El producto de los términos no comunes es (2)(7) **= 14**

Así, tenemos:

$$\mathbf{x^2 + 9x + 14 = (x + 2)(x + 7)}$$

Entonces, para entender de lo que hablamos, cuando nos encontramos con una expresión de la forma:

$$\mathbf{x^2 + (a + b)x + ab}$$

…debemos identificarla de inmediato y saber que podemos factorizarla como **(x + a) (x + b)**

Producto de dos binomios con un término común, de la forma:

$$\mathbf{x^2 + (a - b)x - ab = (x + a)(x - b)}$$

Demostración:

$$(x + a)(x - b) = x^2 - ab - bx + ax = x^2 - ab + (a - b)x = x^2 + (a - b)x - ab$$

Entonces, para entender de lo que hablamos, cuando nos encontramos con una expresión de la forma:

$$\mathbf{x^2 + (a - b)x - ab}$$

…debemos identificarla de inmediato y saber que podemos **factorizarla** como **(x + a) (x – b)**.

Producto de dos binomios con un término común, de la forma:

$$\mathbf{x^2 - (a + b)x + ab = (x - a)(x - b)}$$

Demostración:

$$(x - a)(x - b) = x^2 - ab - bx - ax = x^2 - ab - (a + b)x = x^2 - (a + b)x - ab$$

Entonces, para entender de lo que hablamos, cuando nos encontramos con una expresión de la forma:

$$\mathbf{x^2 - (a + b)x + ab}$$

…debemos identificarla de inmediato y saber que podemos factorizarla como: **(x – a) (x – b)**.

Producto de dos binomios con un término común, de la forma:

$$mnx^{2} + ab + (mb + na)x = (mx + a)(nx + b)$$

En este caso, vemos que el término común (x) tiene distinto coeficiente en cada binomio **(mx y nx)**

Demostración:

$$(mx + a)(nx + b) = mnx^2 + ab + mbx + nax = mnx^2 + ab + (mb + na)x = mnx^2 + (mb + na)x + ab$$

Entonces, para entender de lo que hablamos, cuando nos encontramos con una expresión de la forma:

$$mnx^{2} + ab + (mb + na)x$$

…debemos identificarla de inmediato y saber que podemos factorizarla como: **(mx + a) (nx + b)**.

Cubo de una suma:

$$a^{3} + 3a^{2}b + 3ab^{2} + b^{3} = (a + b)^{3}$$

Entonces, para entender de lo que hablamos, cuando nos encontramos con una expresión de la forma:

$$a^{3} + 3a^{2}b + 3ab^{2} + b^{3}$$

…debemos identificarla de inmediato y saber que podemos factorizarla como **$(a + b)^{3}$**.

Cubo de una diferencia:

$$a^{3} - 3a^{2}b + 3ab^{2} - b^{3} = (a - b)^{3}$$

Entonces, para entender de lo que hablamos, cuando nos encontramos con una expresión de la forma:

$$a^{3} - 3a^{2}b + 3ab^{2} - b^{3}$$

…debemos identificarla de inmediato y saber que podemos factorizarla como **$(a - b)^{3}$**.

A modo de resumen, se entrega el siguiente cuadro con Productos notables y la expresión algebraica que lo representa:

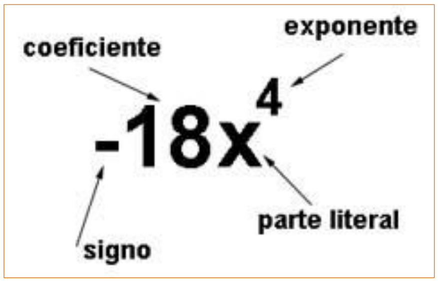
Producto Notable		Expresión Algebraica	Nombre
$(a + b)^2$	=	$a^{2} + 2ab + b^{2}$	Binomio al cuadrado.
$(a + b)^3$	=	$a^{3} + 3a^{2}b + 3ab^{2} + b^{3}$	Binomio al cubo.
$a^2 - b^2$	=	$(a + b)(a - b)$	Diferencia de cuadrados.
$a^3 - b^3$	=	$(a - b)(a^{2} + b^{2} + ab)$	Diferencia de cubos.
$a^3 + b^3$	=	$(a + b)(a^{2} + b^{2} - ab)$	Suma de cubos.
$a^4 - b^4$	=	$(a + b)(a - b)(a^{2} + b^{2})$	Diferencia cuarta.
$(a + b + c)^2$	=	$a^{2} + b^{2} + c^{2} + 2ab + 2ac + 2bc$	Trinomio al cuadrado.

FACTORIZACIÓN

Es el procedimiento algebraico de encontrar dos o más factores cuyo producto es igual al monomio o polinomio expuesto. Las expresiones algebraicas en las que puedes factorizar son: monomios y polinomios (en su forma general).

Monomios: son expresiones algebraicas formadas por una parte literal elevada a un exponente natural (o el producto de estas potencias) y una parte numérica o coeficiente. Es considerado también, como un monomio a la expresión que contenga únicamente parte numérica o coeficiente.

Sus partes son:



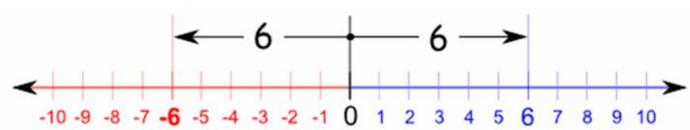
RECORDATORIO

Para entender la factorización es necesario conocer lo siguiente:

- Cualquier expresión que contenga el signo de relación de igualdad es llamada ecuación. Este signo es "=".
- Una ecuación es llamada identidad, en caso la igualdad se cumpla para cualquier valor de las variables que contenga la expresión; si la ecuación se cumple para determinados de las variables y no para otros, la ecuación es de tipo condicional.
- La expresión algebraica que contiene solamente productos entre constantes numéricas y literales separados por medio de signos de suma o resta, es llamada término. La parte numérica del término se llama coeficiente.

En caso el signo sea positivo "+" este no se coloca, ya que el valor absoluto de las expresiones siempre será positivo.

Valor Absoluto: el valor absoluto es la distancia en la recta numérica entre un número entero respecto al cero.



"6" está a 6 de cero, y "-6" **también** está a 6 de cero.

Así que el valor absoluto de 6 es **6**, y el valor absoluto de -6 también es **6**

Grado de un Monomio: el grado de un monomio es igual a la suma de los exponentes (en cada una de sus literales) que estén dentro de la expresión algebraica. Por ejemplo:

$$7x^2y \quad es\ de\ grado\ tres.$$

Se suman las potencias 2 + 1 = 3

$$7x^2y$$

Se suman las potencias 2 + 1 = 3

La expresión anterior equivale a:

$$7 \cdot x^2 \cdot y$$

Y la suma de los exponentes es: 2 + 1 = 3.

$$\boldsymbol{x}\ tiene\ grado\ \mathbf{2}\ /\ \boldsymbol{y}\ tiene\ grado\ \mathbf{1}$$

EJERCICIO 01: determina el grado de cada uno de los monomios que se te presentan a continuación y escribe tu respuesta en el subrayado.

1. $15mn^2$ ____________________ **2.** $16x^3y^4$ ____________________ **3.** $30v^2w^4$ ____________________

4. $22xyx$ ____________________ **5.** $36s^6$ ____________________ **6.** $49abc$ ____________________

7. $62a^3b^6c^9$ ____________________ **8.** $7xyz$ ____________________ **9.** uvw ____________________

10. $150x^2y^3$ ____________________ **11.** $36h$ ____________________ **12.** $48k^{10}$ ____________________

13. $27l^3$ ____________________ **14.** $8y^3$ ____________________ **15.** $60w^6$ ____________________

Polinomios: es la expresión algebraica que constituye la suma o la resta ordenadas de un número finito de términos o monomios. Se denomina a la suma de varios monomios, llamados términos del polinomio. En este caso cada uno de los términos del polinomio son monomios en una misma expresión algebraica.

Es una expresión algebraica constituida por una o más variables, utilizando solamente operaciones de adición, sustracción, multiplicación y exponentes numéricos positivos.

El grado de un polinomio lo determina el número de mayor exponente de las variables que este tenga.

Por ejemplo:

Exponentes

$$\boldsymbol{ax^3 + ax^2 + cx}$$

La variable con mayor exponente

Si el mayor exponente de la variable "x" es 3, el polinomio es de **tercer grado**.

EJERCICIO 02: determina el grado de cada uno de los polinomios que se le presentan a continuación, escribiendo su tipo en la parte derecha.

1. $20x - 60x^2 - 30y^6$ ____________________ **2.** $7m^3n + 14\,m^2n^3 - 21mn^7$ ____________________

3. $55pq + 75pq^5$ ____________________ **4.** $30m^4 - 6\,m^2 - m$ ____________________

5. $20xyz - 60xyz^3 - 30xyz^5$ ____________________ **6.** $9u^2 + 18u^5 - 6u^3 + 3u - 2$ ____________________

7. $30mn - 15mn^2 - 30mn^3$ ____________________ **8.** $5v^7 + 50v^5 - 45v^9 + 75$ ____________________

9. $11yz - 22yz^4 - 33yz^7$ ____________________ **10.** $b^2 + 18b^5 - 9b^3 + 3b - 3$ ____________________

La factorización puede considerarse como la operación inversa a la multiplicación, pues el propósito de ésta última es hallar el producto de dos o más factores; mientras que en la factorización, se buscan los factores de un producto dado.

Se llaman factores o divisores de una expresión algebraica, a los términos que multiplicados entre sí dan como producto la primera expresión.

$$\xrightarrow{\text{Factorización}}$$

$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$$

$$24 = 2 \cdot 3 \cdot 4$$

$$24 = 4 \cdot 6$$
$$24 = 8 \cdot 3$$
$$24 = 12 \cdot 2$$

$\longleftarrow$

Multiplicación

Al factorizar una expresión, la escribimos como un producto de sus factores. Suponiendo que tenemos dos números 4 y 7. En este caso, te solicitan sean multiplicados:

$$4 \times 7 = 28$$

Durante el procedimiento, tenemos un producto de 28 y se nos pide que lo factoricemos; entonces tendremos

$$28 = 4 \times 7$$

Dentro de los polinomios podemos encontrar expresiones algebraicas que, conforme a la cantidad de monomios que contenga se les clasifica:

Binomio: expresión algebraica que contiene una suma o diferencia de dos monomios.

Suma o diferencia

$$3x^2 \pm 2y$$

Monomios

Trinomio: expresión algebraica que contiene tres monomios y entre estos existe una suma o diferencia.

Suma o diferencia

$$4x^2 \pm 5xy \pm 3y$$

Monomios

EJERCICIO 03: determina el tipo de expresión algebraica que se te presentan a continuación, escribiendo su tipo en la parte derecha.

1. $4x^5y + 5xy - 15x^3y^2$	________________	**2.** $9mn$	________________
3. $10a^2b^3 - 12abc + 15a^5b^2c^3$	________________	**4.** $10m^4n + 15\,m^3n - 5mn^2$	________________
5. $12w + 12v$	________________	**6.** xyz	________________
7. $7g + 35h - 14gh$	________________	**8.** $10xyz - 20\,xyz$	________________
9. $x^3yz + 2xy^4z^5 - 4x^3y^2z$	________________	**10.** $10uv$	________________

CASO FACTOR COMÚN MONOMIO

Es el factor que está presente en cada uno de los términos del polinomio.

En este caso el factor común es sólo el coeficiente, ya que no hay literal que esté presente en todos los monomios. El coeficiente 4 es la cantidad más pequeña y en esta pueden ser divididos los demás coeficientes.

$$8a - 4b + 16c + 12d =$$
$$4(2a - b + 4c + 3d)$$

Explicación:

Se saca el número 4 y se coloca multiplicando al paréntesis. A eso se le dice "sacar factor común 4". Luego, se divide cada término por el número 4, y se colocan todos los resultados dentro del paréntesis, sumando o restando según el signo que resulte de la división.

Primer término:

$$\frac{8a}{4} = 2a$$

este término resultó "positivo"

Segundo término:

$$\frac{-4b}{4} = -b$$

este término resultó "negativo"

Tercer término:

$$\frac{16c}{4} = 4c$$

Cuarto término:

$$\frac{12d}{4} = 3d$$

¿Por qué el número 4? Los números 8, 4, 16 y 12, son divisibles 4. Como en todos los términos hay números divisibles por 4, se dice que "hay factor común 4".

8 es igual a **4** x 2
4 es igual a **4** x 1
16 es igual a **4** x 4
12 es igual a **4** x 3

Como el número 4 está multiplicando en todos los términos, es un "factor común".

Es así, como obtienes cada uno de los términos de la solución:

$$4(2a - b + 4c + 3d)$$

Encontrar el factor común 4 significa "dividir a todos los términos por 4". Al realizar esta división entre un número positivo, los términos resultaron con el mismo signo que ya tenían. Esto por la ley de signos.

Verificación de la Factorización de la Expresión Algebraica

Se realiza la distributiva en el resultado. En palabras más simples, debes de aplicar la propiedad distributiva del producto respecto de la suma y la resta. Esto te dará como resultado la expresión algebraica original.

En el polinomio ya factorizado:

$$4(2a - b + 4c + 3d)$$

$$4 \times 2a = 8a$$
$$4 \times (-b) = -4b$$
$$4 \times 4c = 16c$$
$$4 \times 3d = 12d$$

El resultado será:

$$8a - 4b + 16c + 12d$$

Estos son los 4 términos que tenía en el polinomio original, con los signos correctos, entonces está bien factorizado: las dos expresiones son equivalentes.

Ahora, no sólo son divisibles por 4, sino también por 2, y hasta por 1. En este caso es necesario sacar el **mayor** número posible que divida a todos los términos, y ese número es el 4. Es el llamado Máximo Común Divisor (M.C.D o D.C.M).

Si no podemos darnos cuenta a simple vista de cuál es ese número, entonces podemos usar la regla del D.C.M para calcularlo. Es decir que el "factor común" que nos piden sacar entre varios números es su Máximo Común Divisor. Para mayor comprensión, este ejemplo:

$$9x^3 - 6x^2 + 12x^5 - 18x^7 =$$

$$3x^2\,(3x - 2\ + 4x^3 - 6x^5)$$

Solución:

Se saca el factor común $3x^2$. Ya que, el factor común entre los números es 3, y entre las letras es x^2, ya que es la x con el menor exponente con que aparece en el polinomio.

RECORDATORIO:

Encontrando el M.C.D.:

18 – 12 – 6 – 9	3
6 – 4 – 2 – 3	

Divisibles en 2 | Divisible en 3

Hasta acá se queda porque uno de los coeficientes no es divisible en el número 2, el cual divide al resto de número. Por tanto, el M.C.D es el 3.

Se divide cada término por $3x^2$, recordando que para dividir las letras hay que restar los exponentes. Aplicando la propiedad de división de potencias de igual base.

Primer término:

$$\frac{9x^3}{3x^2} = 3x$$

"9 dividido 3 da como resultado 3""Por el lado de los números"
"x^3 dividido x^2 = x^{3-2} = x^1 = x " "Por el lado de las letras".

Segundo Término:

$$\frac{-6x^2}{3x^2} = -2$$

"-6 dividido 3 resulta -2"
"x^2 dividido x^2 resulta 1"

Tercer Término:

$$\frac{12x^5}{3x^2} = 4x^3$$

"12 dividido 3 resulta 4"
"x^5 dividido x^2 resulta x^3"

Cuarto Término:

$$\frac{-18x^4}{3x^2} = -6x^2$$

" -18 dividido 3 resulta -6 "
" x^4 dividido x^2 resulta x^2"

El número 3 es factor común, ya que el número 3 divide exactamente a 9, 6, 12 y 18. Es el Máximo Común Divisor (MCD o DCM) entre ellos.

Y la "x" está en todos los términos. Entonces es también factor común la x con el menor exponente con que aparece, es decir: x^2. El factor común es entonces $3x^2$.

EJERCICIO 04: a continuación se te presentan casos de factorización por factor común monomio.

1. $a^2 + 2a$	**2.** $10b - 30ab^2$	**3.** $10a^2 + 5a + 15a^3$
4. $a^2 + ab$	**5.** $b + b^2$	**6.** $x^2 + x$ **7.** $3a^3 - a^2$
7. $3a^3 - a^2$	**8.** $x^3 - 4x^2$	**9** . $5m^2 + 15m^3$
10. $ab - bc$	**11.** $8m^2 - 12mn$	**12.** $15c^3 3d^2 + 60c^2 2d^3$
13. $a^3 + a^2 + a$	**14.** $15y^3 + 20y^2 - 5y$	**15.** $2u^2 - u$

CASO TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

Es el trinomio (polinomio de tres términos) tal que, dos de sus términos son cuadrados perfectos y el otro término es el doble producto de las bases de esos cuadrados. Su denotación es:

$$a^2 - 2ab + b^2$$

Es un trinomio cuadrado perfecto; si el primer y tercer término tienen raíz cuadrada exacta (de su literal como del coeficiente) y el término de en medio (segundo término) es el doble del resultado de la multiplicación entre la raíz cuadrada del primer y tercer término.

Por ejemplo:

$$36x^2 + 12xy^2 + y^4$$

$$\sqrt{36x^2} + 12xy^2 + \sqrt{y^4}$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$6x \qquad\qquad\qquad y^2$$

$$2 \times (6x)(y^2)$$

$$12xy^2$$

Comprobando que el doble del resultado de la multiplicación entre las raíz cuadrada del primer como del tercer término, es el término de en medio (o segundo término) del polinomio original. Se coloca entre paréntesis la suma de estos y se elevan al cuadrado. Esta será la factorización del polinomio original:

$$(6x + y^2)^2$$

La combinación de signos (en este caso) es según la ley de signos.

$$36x^2 + 12xy^2 + y^4 = (6x + y^2)^2$$

$$+ \; por + = \; +$$

En el trinomio cuadrado perfecto los términos cuadrados son siempre positivos, en cambio el término del doble producto puede ser negativo; en este caso debe ser negativo uno de los términos del binomio cuyo cuadrado es el trinomio dado, del ejemplo anterior tenemos:

$$(6x - y^2)^2 = (6x - y^2)(6x - y^2) = (6x)^2 - 12xy^2 + (y^2)^2$$

Ó también así:

$$(y^2 - 6x)^2 = (y^2 - 6x)(y^2 - 6x) = (6x)^2 - 12xy^2 + (y^2)^2$$

Ambas son respuestas aceptables.

Identificar si un Trinomio es Cuadrado Perfecto

Un trinomio ordenado con relación a una letra es cuadrado perfecto cuando la primera y tercer letra son cuadrados perfectos (o tienen raíz cuadrada exacta) y son positivos y el segundo término es el doble producto de sus raíces cuadradas.

Por ejemplo:

$$25 + 10xy + x^2y^2 = (5 + xy)^2$$

$$1 + a^{10} - 2^{a5} = (1 - a^5)^2$$

$$225x^4 + 25m^2n^4 - 150x^2mn^2 = (15x^2 + 5mn^2)^2$$

$$x^2 + 2x(x - y) + (x - y)^2 = [x + (x - y)]^2 = [2x + y]^2$$

EJERCICIO 05: a continuación se te presentan casos de factorización de la forma trinomio cuadrado perfecto.

1. $a^2 - 2ab + b^2$ **2.** $49m^6 - 70am^3n^2 + 25a^2n^4$ **3.** $9b^2 - 30ab + 25a^2$ **4.** $b^2 - 12b + 36$

5. $25x^2 + 70xy + 49y^2$ **6.** $x^2 + 10x + 25$ **7.** $4a^2 + 4a + 1$ **8.** $1 + 6a + 9a^2$

9. $16m^2 - 40mn + 25n^2$ **10.** $25a^2c^2 + 20acd + 4d^2$

CASO DIFERENCIA DE CUADRADOS

Se le llama diferencia de cuadrados al binomio conformado por dos términos a los que se les puede sacar raíz cuadrada exacta. Al estudiar tener en mente los productos notables, teníamos que:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

En donde el resultado es una diferencia de cuadrados, para este capítulo es el caso contrario:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Donde siempre la diferencia de cuadrados es igual al producto de la suma por la diferencia de sus bases.

Procedimiento:

- ✓ Se extrae la raíz cuadrada de ambos términos.
- ✓ Se multiplica la suma por la diferencia de estas cantidades (el segundo término del binomio negativo es la raíz del término del binomio que es negativo).

Producto de la suma por la diferencia de dos cantidades.

Básicamente se escriben así:

(a + b)(a − b)

Si los multiplicamos queda:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

Entonces el producto notable es:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Se lee: la suma de dos cantidades multiplicada por su diferencia es igual a la diferencia de sus cuadrados.

Factorizar $x^2 - y^2$ raíces: $\sqrt{x^2} = x$ $\sqrt{y^2} = y$ respuesta: $(x + y)(x - y)$

Ejemplos:

$$16m^2 - 9n^2 = (4m + 3n)(4m - 3n)$$

$$y^2 - (9(x-1)^2 = [y + 3(x-1)][y - 3(x-1)] = (y + 3x - 3)(y - 3x + 3)$$

$$49(m+n)^2 - 144(m-n)^2 = [7(m+n)+12(m-n)][7(m+n)-12(m-n)] = (19m - 5n)(19n - 5m)$$

Caso Especial:

$$a^2 + 2a(a-b) + (a+b)^2$$

Raíz cuadrada de:

$$a^2 = a$$

Raíz cuadrada de:

$$(a-b)^2 = (a-b)$$

Doble producto sus raíces:

$$(2 \times a \times (a-b) = 2a(a-b)$$

La expresión anterior cumple, entonces:

$$[(a + (a-b)]^2$$

$$(a + a - b) = (2a - b)^2$$

EJERCICIO 06: a continuación se te presentan casos de factorización diferencia de cuadrados.

1. $(1-a)^2$ **2.** $16x^2 - 25y^4$ **3.** $49x^2y^6z^{10} - a^{12}$ **4.** $a^{2n} - 9b^{4m}$ **5.** $\frac{a^2}{4} - \frac{b^4}{9}$

6. $9a^2 - 25b^2$ **7.** $4x^2 - 1$ **8.** $3x^2 - 12$ **9.** $8y^2 - 18$ **10.** $16x^2 - 100$

CASO TRINOMIO DE LA FORMA AX² +BX + C

Definición: Este tipo de trinomio se diferencia del anterior debido a que el termino al cuadrado se encuentra precedido por un coeficiente diferente de uno (debe ser positivo). Este se trabaja de otra forma que se describe en el siguiente procedimiento:

Factorizar	$3m^2 + 8m + 5$	
1er paso	$3(3m^2 + 8m + 5)$	$= (3m)^2 + 8(3m) + 15$
2° paso	$(3m \quad)(3m \quad)$	
3er paso	$\frac{(3m \quad)(3m \quad)}{3}$	
4° paso	$\frac{(3m + \quad)(3m + \quad)}{3}$	
5° paso	$\frac{(3m + 3)(3m + 5)}{3}$	

Caso Especial:

$$6x^4 + 5x^2 - 6$$

$$(6)\ 6x^4 + (6)5x^2 - (6)6 =$$

$$36x^2 + (6)5x^2 - 36 =$$

$$\frac{(6x^2 + 9)(6x^2 - 4)}{3 \times 2} =$$

$$(2x^2 + 3)(3x^2 - 2)$$

Siempre que sea posible hay que realizar la división indicada que nos queda de este tipo de trinomio, sin olvidar que cada factor del denominador que se simplifique se corresponde a todos los términos de uno solo de los binomios.

EJERCICIO 07: a continuación se te presentan casos de Trinomio de la Forma $ax^2 + bx + c$.

1. $2x^2 + 3x - 2$
2. $15m^2 + 16m - 15$
3. $30x^2 + 13x - 10$
4. $6m^2 - 13am - 15a^2$
5. $18a^2 + 17ay - 15y^2$
6. $20x^2 + 7x - 6$
7. $18a^2 - 13a - 5$
8. $6x^2 - 7x - 3$
9. $20x^2 + 7x - 6$
10. $2x^2 + 3x - 2$

CASO CUBO PERFECTO BINOMIOS (CUATRINOMIO)

Recordando el tema de productos notables, en donde tenemos:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

En este caso la factorización es realizar la operación inversa a esta:

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$$

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$$

Para reconocerlo se deben tomar en cuenta los siguientes puntos:

Debe tener cuatro términos, y estar ordenado con respecto a una letra.

Dos de sus términos, el 1º (a^3) y el 4º (b^3), deben poseer raíz cúbica exacta.

El segundo término debe ser igual al triple producto del cuadrado de la raíz cúbica del primer término por la raíz cúbica del cuarto termino $[3(a)^2(b)]$.

El tercer término debe ser igual al triple producto de la raíz cúbica del primer término por el cuadrado la raíz cúbica del cuarto termino $[3(a)(b)^3]$.

El segundo y el cuarto termino deben tener el mismo signo y puede ser positivo o negativo, el primer y tercer término siempre son positivos (si el primer y tercer término son negativos realizar factor común con el factor -1).

Si todos los términos son positivos el resultado es el cubo de la suma de dos cantidades $(a + b)^3$, si hay términos negativos el resultado es el cubo de la diferencia de dos cantidades $(a - b)^3$.

Ejemplo explicativo:

Factorizar:	$27a^3 - 8b^6 - 54a^2b^2 + 36ab^4$	
Ordenamos	$27a^3 - 54a^2b^2 + 36ab^4 - 8b^6$	
Raíces	$27a^3 = 3a \qquad 8b^6 = 2b^2$	
Productos	$3(3a)^2(2b^2) = 54a^2b^2$	$3(3a)(2b^2)^2 = 36ab^2$
Resultado	$(3a - 2b^2)^3$	

Ejemplos:

$$m^3 + 15m^2 + 75m + 125 = (m+5)^3$$

$$216x^3 - 756x^2y^2z + 882xy^4z^2 - 343y^6z^3 = (6x - 7y^2z)^3$$

$$-8z^3 + 36z^2y - 54zy^2 + 27y^3 = -1(8z^3 - 36z^2y + 54zy^2 - 27y^3) = -1(2z - 3y)^3$$

En este tipo de factoreo, se trata de reconocer que pertenece a este tipo polinomio.

EJERCICIO 08: a continuación se te presentan casos de cuatrinomio en hojas aparte y como te lo indique el catedrático realiza encuentra las soluciones correspondientes a cada uno.

1. $m^3 + 15m^2 + 75m + 125$

2. $a^3 + 3a^2 + 3a + 1$

3. $64x^9 - 125y^{12} - 240x^6y^4 + 300x^3y^8$

4. $125x^{12} + 600x^8y^5 + 960x^4y^{10} + 512y^{15}$

5. $216^3 - 756x^2y^2z + 882xy^4z^2 - 343y^6z^3$

6. $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$

7. $8x^6 + 54x^2y^6 - 27y^9 - 36x^4y^3$

8. $a^3 + 3a^2 + 3a + 1$

9. $27 - 27x + 9x^2 - x^3$

10. $m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3$

CASO SUMA O DIFERENCIA DE CUBOS PERFECTOS

En este caso de factorización es importante que tengas la noción de lo que son productos notables:

$$\frac{x^3 + y^3}{x + y} = x^2 - xy + y^2$$

$$\frac{x^3 - y^3}{x - y} = x^2 + xy + y^2$$

Pero en la división exacta el dividendo es igual al divisor multiplicado por el cociente, efectuándolo nos queda:

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

De donde se deducen las siguientes reglas:

- ✓ La suma de dos cubos perfectos se descompone en dos factores, el primero es la suma de sus raíces cúbicas, y el segundo se compone del cuadrado de la primera raíz menos el producto de ambas raíces más el cuadrado de la segunda raíz.

- ✓ La diferencia de dos cubos perfectos se descompone en dos factores, el primero es la diferencia de sus raíces cúbicas, y el segundo se compone del cuadrado de la primera raíz más el producto de ambas raíces más el cuadrado de la segunda raíz.

Procedimiento:

Factorizar:	$27a^3 - 8b^6$		
Raíces	$27a^3 = 3a$	$8b^6 = 2b^2$	
Productos	$(3a)^2 = 9a^2$	$(3a)(2b^2) = 6ab^2$	$(2b^2)^2 = 4b^4$
Resultado	$(3a - 2b^2)(9a^2 + 6ab^2 + 4b^4)$		

Caso Especial:

$$1 + (x + y)^3$$
$$[1 + (x + y)(1^2 - 1(x + y) + (x + y)^2]$$
$$(1 + x + y)(1 - (x + y) + (x + y)^2)$$
$$(1 + x + y)(1 - x - y + x^2 + 2xy + y^2)$$

EJERCICIO 09: a continuación se te presentan caso suma o diferencia de cubos.

1. $1 + a^3$ **2.** $x^3 - 27$ **3.** $x^6 - 8y^{12}$
4. $(m-2)^3 + (m-3)^3$ **5.** $(x - y)^3 - 8$ **6.** $a^3 + b^3$
7. $a^3 - b^3$ **8.** $1 - a^3$ **9.** $x^3 + y^3$
10. $64 + a^6$

BINOMIO DE NEWTON

El binomio de Newton es un algoritmo que permite calcular una potencia cualquiera de un binomio, para ello se emplean los coeficientes binomiales, que no son más que una sucesión de números combinatorios.

La fórmula general del binomio de Newton dice:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

Los números combinatorios que aparecen en la fórmula son precisamente los llamados coeficientes binomiales.

Por ejemplo:

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= \binom{4}{0} a^4 + \binom{4}{1} a^3b + \binom{4}{2} a^2b^2 + \binom{4}{3} ab^3 + \binom{4}{4} b^4 \\ &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4\end{aligned}$$

En el caso en que en el binomio figure un signo menos, los signos del desarrollo deben irse alternando de la forma $+ \; - \; + \; - \; + \; - \; \ldots$

Para una mayor comprensión de lo que es el Binomio de Newton, deduzcamos la fórmula que nos permitirá elevar a cualquier potencia de exponente natural, n, un binomio.
Esto es la forma de obtener:

$$(a + b)^n$$

Para ello veamos cómo se van desarrollando las potencias de (a + b)

$$(a+b)^1 = a + b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = (a+b)^3(a+b) = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Observando los coeficientes de cada polinomio resultante vemos que siguen esta secuencia

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

Esto es el triángulo de Tartaglia que se obtiene escribiendo en filas los números combinatorios desde los de numerador 1.

Es decir, que cada uno de esos números corresponde al valor de un número combinatorio así:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\ & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\ & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\ \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \end{array}$$

Podemos observar que cada fila empieza y termina por 1, que los números que aparecen forman una fila simétrica, o sea el primero es igual al último, el segundo igual al penúltimo, etc., y cada número es la suma de los dos que tiene encima. Por otra parte en cualquier momento podemos hallar el valor de un número combinatorio cualquiera recordando que se calculan por la siguiente fórmula:

$$\binom{m}{n} = \frac{m.(m-1)(m-2)..(m-n+1)}{n!}$$

Por ejemplo si quiero calcular:

$$\binom{5}{3} = \frac{5.4.3}{3.2.1} = 10$$

Por otra parte, observando las potencias de *(a + b)* de nuevo vemos que las potencias de *a* empiezan elevadas a n, va disminuyendo uno a uno hasta llegar a cero. A los exponentes de *b* les ocurre lo contrario. Con lo que ya tenemos podemos calcular directamente la siguiente potencia de *(a+b)*, sus coeficientes serán la fila quinta del triángulo de Tartaglia.

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Y ya podemos escribir la fórmula general (antes mencionada) del Binomio de Newton.

TRIÁNGULO DE PASCAL O DE TARTAGLIA

Pascal ideó una manera sencilla de calcular números combinatorios (aunque en algunos textos esta idea se atribuye a Tartaglia):

$$\begin{array}{ccccccccccc} &&&&&1&&&&& \\ &&&&1&&1&&&& \\ &&&1&&2&&1&&& \\ &&1&&3&&3&&1&& \\ &1&&4&&6&&4&&1& \\ 1&&5&&10&&10&&5&&1 \end{array}$$

El método recibe el nombre de triángulo de Pascal y se construye de la siguiente forma (por filas y de arriba a abajo):

- ✓ En el vértice se coloca un 1.
- ✓ Cada fila empieza y acaba en 1.
- ✓ Los otros números de la fila son siempre la suma de los dos que tiene justo encima.

Por ejemplo:

La última fila, por ejemplo, nos daría el valor de los números combinatorios consecutivos:

$$\binom{5}{0}, \quad \binom{5}{1}, \quad \binom{5}{2}, \quad \binom{5}{3}, \quad \binom{5}{4}, \quad \binom{5}{5}$$

El término general del desarrollo de $(a+b)^n$ viene dado por la fórmula:

$$\binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Por ejemplo:

Según esto, en el primer ejemplo tendríamos que el tercer término sería (para $k=2$ ya que la serie empieza siempre por $k=0$):

$$\binom{4}{2} a^2 b^2 = 6a^2 b^2$$

Esta fórmula permite calcular el valor de un término cualquiera sin necesidad de efectuar todo el desarrollo.

Por ejemplo, para calcular el 20º término del desarrollo de $(x+y)^{30}$. Aplicando la fórmula:

$$\binom{30}{19} x^{30-19} y^{19} = 54627300 x^{11} y^{19}$$

EJERCICIO 10: observa y estudia detenidamente los problemas resueltos, y continúa con resolver los demás. En tu cuaderno, desarrolla para cada solución el Triángulo de Tartaglia.

1) Desarrollar la potencia $(2x-3y)^{15}$

$$(2x-3y)^{15} = \binom{15}{0}(2x)^{15} + \binom{15}{1}(2x)^{14}(-3y) + \binom{15}{2}(2x)^{13}(-3y)^2 + \ldots + \binom{15}{15}(-3y)^{15}$$

La fila 15 del triángulo de Tartaglia es: 1, 15, 105, 455, 1365, 3003, 5005, 6435, 6435, 5005, 3003, 1365, 455, 105, 15, 1

Que serán los valores de los coeficientes.

2) Calcular sin desarrollar el término que ocupara el lugar 50 en el desarrollo de:

$$\left(a+\frac{3}{b}\right)^{100}$$

El primer término tiene de coeficiente $\binom{100}{0}$, el segundo $\binom{100}{1}$, el tercero $\binom{100}{2}$, etc.

Por tanto el término de lugar 50 será:

$$T_{50}=\binom{100}{49}\left(a^{2}\right)^{51}\left(\frac{3}{b}\right)^{49} = 98913082887808032681188722800.\ a^{102}\cdot\frac{3^{49}}{b^{49}} = 9{,}89.10^{28}.a^{102}\cdot\frac{3^{49}}{b^{49}}$$

En general el término de lugar k+1 en el desarrollo de $(a+b)^{n}$ es:

$$T_{k+1}=\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k}$$

3) Si el segundo término de un desarrollo de la potencia de un binomio es:

$$\binom{12}{1}.a^{11}.\left(\frac{1}{2}b\right)$$

¿Cuál es el término penúltimo? ¿Y cuál es el binomio y su potencia? El penúltimo término será el de lugar 12, pues habrá 13 términos y valen:

$$T_{12}=\binom{12}{11}.a.\left(\frac{1}{2}b\right)^{11}$$

El binomio y su potencia serán:

$$\left(a+\frac{1}{2}b\right)^{12}$$

4) Hallar el término medio del desarrollo de:

$$\left(\sqrt{2}-3\sqrt{a}.b^{2}\right)^{14}$$

Como está elevado a 14 habrá 15 términos, por tanto el término que está en medio es el de lugar 8, tiene 7 por delante y 7 por detrás.

$$T_{8}=\binom{14}{7}.\left(\sqrt{2}\right)^{7}.\left(3\sqrt{a}.b^{2}\right)^{7}$$

Vamos a desarrollarlo:

$$T_{8}=\frac{14.13.12.11.10.9.8}{7.6.5.4.3.2}.2^{3}\sqrt{2}.3^{7}.a^{3}\sqrt{a}.b^{14} = 3432.8.2187a^{3}b^{14}\sqrt{2a} = 60046272a^{3}b^{14}\sqrt{2a}$$

5) Escribe el término que contiene x^{31} en el desarrollo de:

$$\left(\frac{2x^2}{y}-\frac{y^2}{x}\right)^{20}$$

El término de lugar k+1, como hemos dicho antes, tiene esta forma:

$$T_{k+1}=(-1)^k\binom{20}{k}\left(\frac{2x^2}{y}\right)^{20-k}\left(\frac{y^2}{x}\right)^k$$

Veamos cómo quedan las potencias *x* y de *y*:

$$T_{k+1}=(-1)^k\binom{20}{k}\frac{2^{20-k}x^{40-2k}}{y^{20-k}}.\frac{y^{2k}}{x^k}=(-1)^k\binom{20}{k}\frac{2^{20-k}x^{40-2k}y^{2k}}{y^{20-k}x^k}$$

Dividiendo las potencias de la misma base, restando los exponentes tenemos:

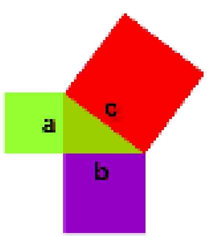
$$T_{k+1}=(-1)^k\binom{20}{k}2^{20-k}x^{40-3k}y^{3k-20}$$

Por tanto el exponente de x es 40-3k. Como queremos obtener x^{31}, basta igualar 40-3k=31, de donde k=3. Se trata por tanto del término de lugar 4. Ahora, escribimos el término completo:

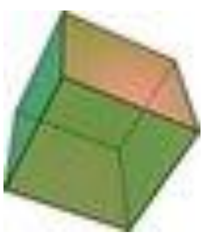
$$T_4=(-1)^3\binom{20}{3}2^{17}x^{31}y^{-11}=-\frac{20.19.18}{3.2}131072x^{31}\frac{1}{y^{11}}=-\frac{149422080x^{31}}{y^{11}}$$

GEOMETRÍA

La Geometría trata sobre las **formas** y sus propiedades. Los dos temas más comunes son:



Geometría Plana (sobre formas planas como líneas rectas, círculos y triángulos... formas que se pueden dibujar en un trozo de papel).



Geometría Sólida (sobre objetos tridimensionales como cubos y pirámides).

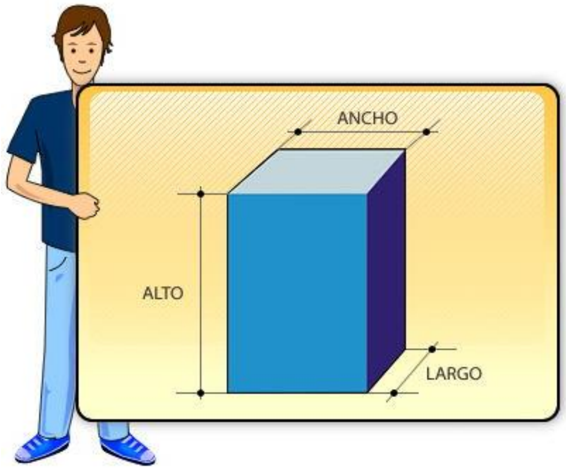
GEOMETRÍA SÓLIDA

Es la geometría del espacio tridimensional, el tipo de espacio donde vivimos...

¿QUÉ SON LOS CUERPOS GEOMÉTRICOS?

Un Sólido o Cuerpo Geométrico es una figura geométrica de tres dimensiones (largo, ancho y alto), que ocupa un lugar en el espacio y en consecuencia tiene un volumen.

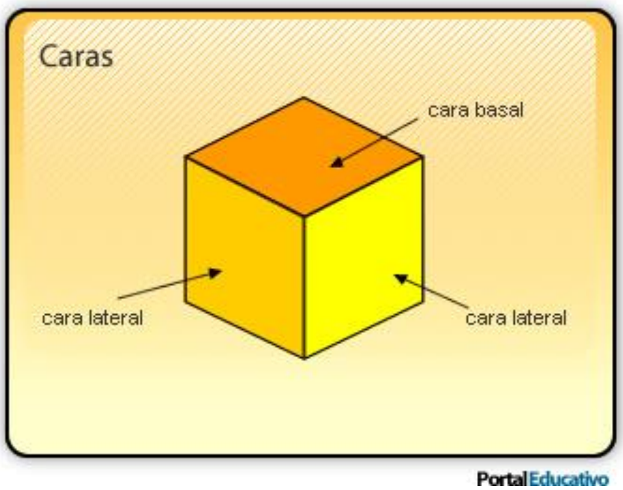
Los cuerpos geométricos pueden ser: **Poliedros y Cuerpos Redondos.**



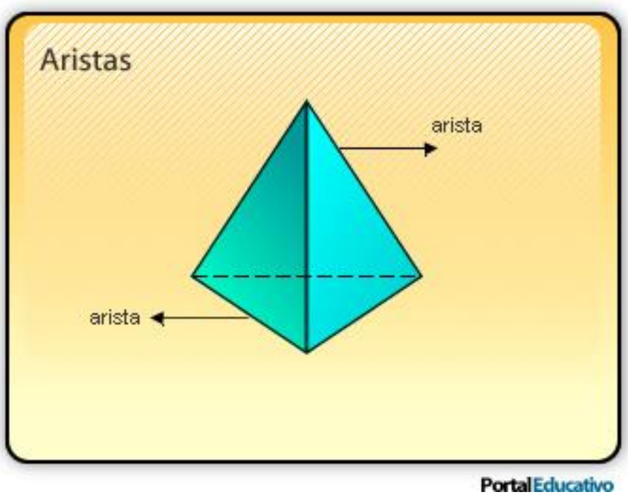
POLIEDROS

Son sólidos geométricos de muchas caras, que contienen los siguientes elementos: **caras, aristas, vértices.**

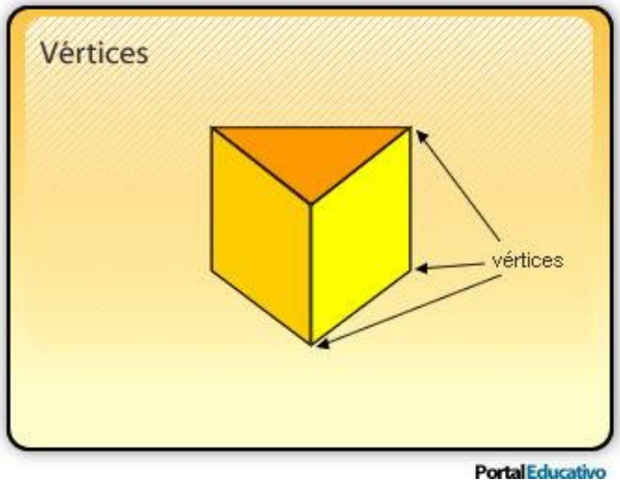
Caras: son las superficies planas que forman el poliedro, las cuales se interceptan entre sí.



Aristas: son los segmentos formados por la intersección de dos (2) caras.

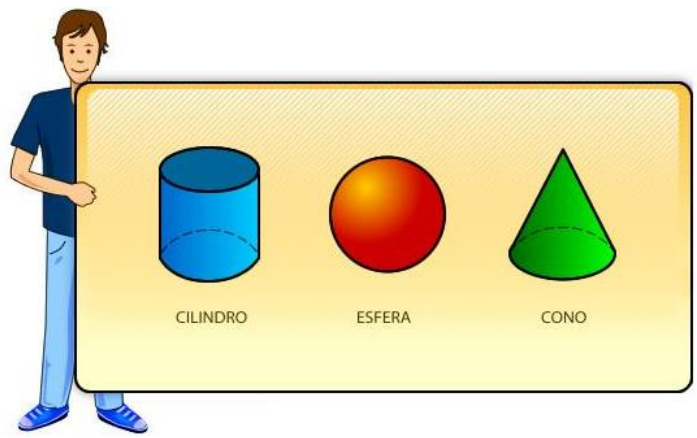


Vértices: son los puntos donde se interceptan 3 o más aristas.



CUERPOS REDONDOS

Son cuerpos geométricos compuestos total o parcialmente por figuras geométricas curvas; como por ejemplo el cilindro, la esfera o el cono.



RECONOZCAMOS LOS CUERPOS REDONDOS EN NUESTRO ENTORNO

En nuestro entorno podemos encontrar muchas formas. ¿Reconoces alguna?

Recuerda que los cuerpos redondos tienen superficies curvas.

Las superficies curvas, ya sea del cilindro, cono o esfera, **son consideradas igualmente caras**. Por lo tanto el **cilindro**, por ejemplo, tiene dos caras basales planas, y una cara lateral curva. El **cono** tiene una cara basal plana y una cara curva. La **esfera** tiene una cara curva.

IDENTIFICACIÓN DE CARAS, ARISTAS Y VÉRTICES EN CUERPOS GEOMÉTRICOS

LOS CUERPOS GEOMÉTRICOS

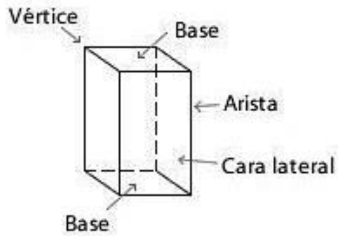
Los cuerpos geométricos son los elementos que, ya sean reales o ideales — que existen en la realidad o pueden concebirse mentalmente — ocupan un volumen en el espacio desarrollándose por lo tanto en las tres dimensiones de alto, ancho y largo; y están compuestos por figuras geométricas.

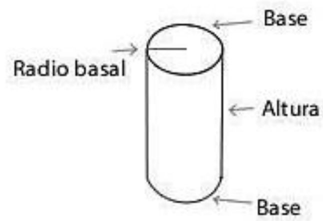
CLASIFICACIÓN

Los cuerpos geométricos se clasifican en **Poliedros** y **Cuerpos redondos.**

1. **Vértice:** los vértices de un poliedro son los vértices de cada una de las caras del poliedro. Tres caras coinciden en un mismo vértice.
2. **Arista:** las aristas de un poliedro son los lados (líneas) de las caras del poliedro. Dos caras tienen una arista en común.
3. **Caras:** las caras de un poliedro son cada uno de los polígonos que limitan al poliedro.

4. **Radio Basal:** es el radio de la base del cuerpo redondo.
5. **Altura:** corresponde al eje, es perpendicular a las bases y llega al centro de ellas.





Cuadro comparativo caras, aristas y vértices de los poliedros.

Nombre	Imagen	Vértices (V)	Aristas (A)	Caras (C)
Tetraedro		4	6	4
Cubo o Hexaedro		8	12	6
Octaedro		6	12	8
Dodecaedro		20	30	12
Icosaedro		20	30	12

Nombre	Imagen	Vértices (V)	Aristas (A)	Caras (C)
Prisma triangular		6	9	5
Prisma rectangular		8	12	6
Prisma pentagonal		10	15	7
Prisma hexagonal		12	18	8
Pirámide cuadrangular		5	8	5

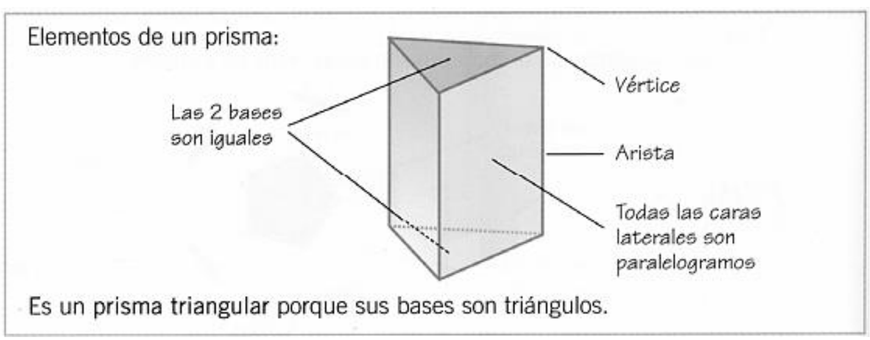
portaleducativo.net

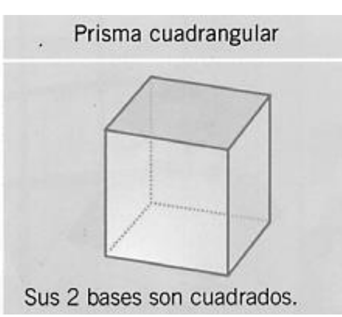
LOS PRIMAS

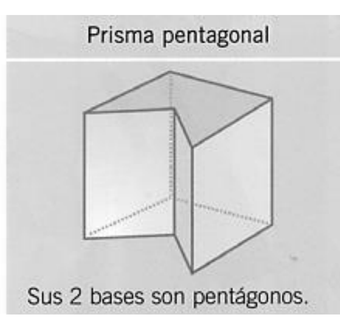
Los prismas son poliedros formados por dos bases iguales y sus caras laterales son paralelogramos. Los prismas se nombran por el polígono de sus bases.

- ✓ Sus vértices son los del polígono de la base por dos.
- ✓ Sus aristas son las del polígono de la base por tres.

Prisma

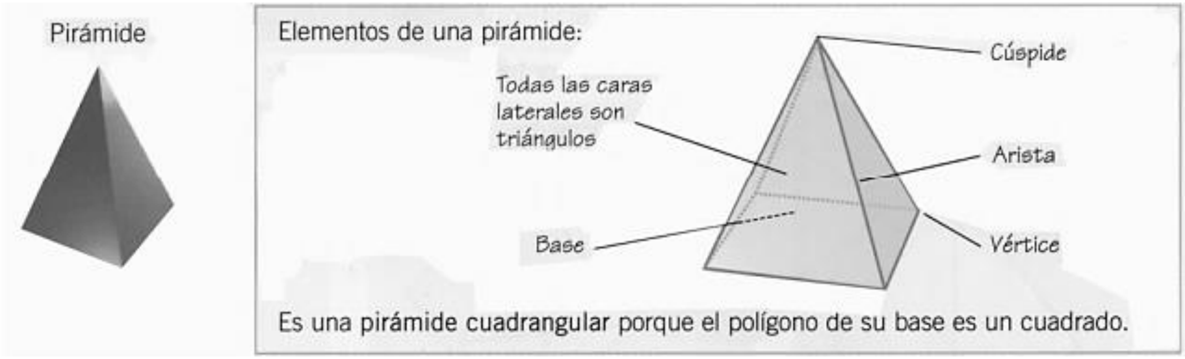






LAS PIRÁMIDES

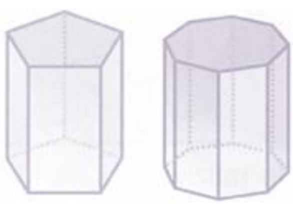
Las pirámides son poliedros con una sola base formada por un polígono cualquiera, y con caras laterales que son triángulos. Se nombran por el polígono de su base.



Sus vértices son los del polígono de la base. Las aristas son las del polígono de la base por dos. Una cúspide.

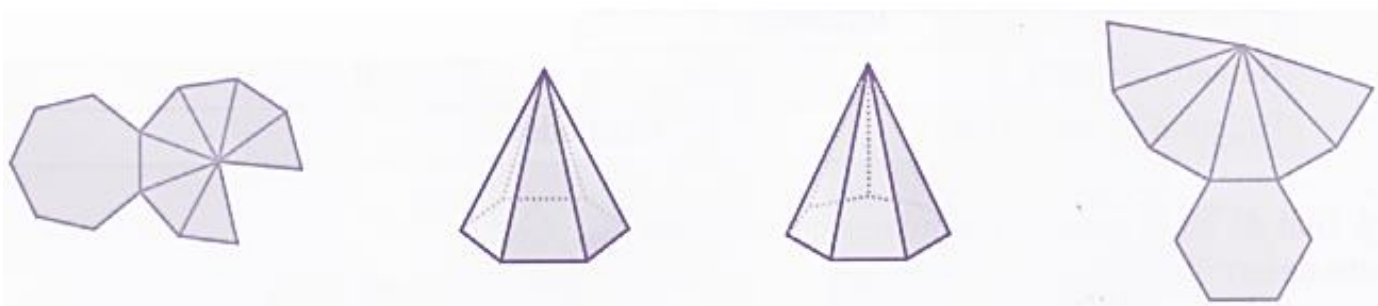
EJERCICIO 11. Lee detenidamente cada uno de los incisos, analiza y realiza lo que se te pide.

1. Observa Los prismas y completa la tabla.



Nombre del prisma	Polígono de sus bases	Número de caras	Número de aristas

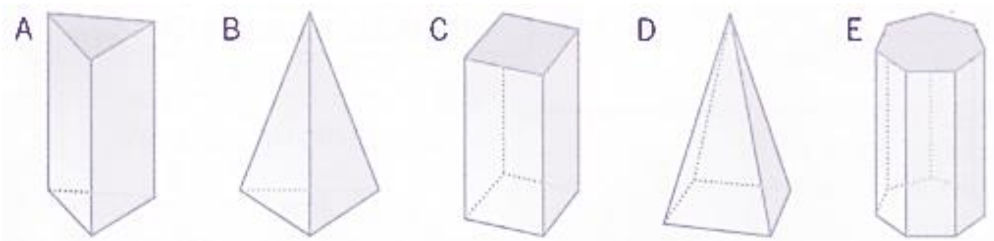
2. Relaciona cada pirámide con su desarrollo.



3. Completa la tabla.

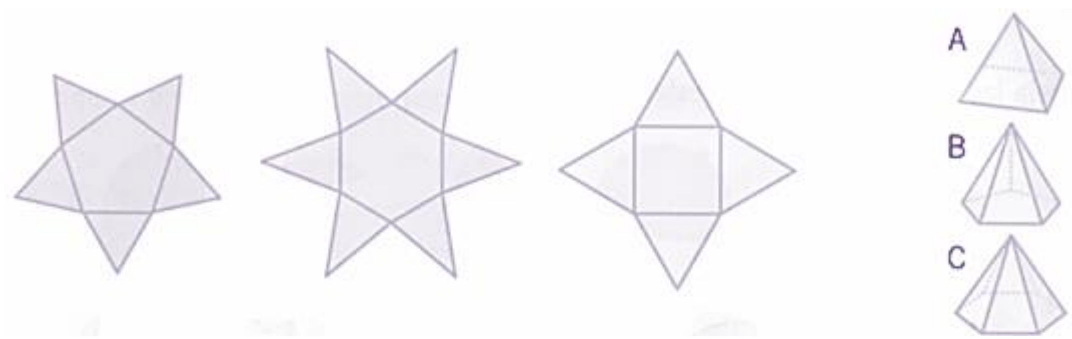
Nombre de La pirámide	Base	Caras laterales	Vértices	Aristas	Cúspides
	cuadrado				
	heptágono				
P. octogonal					
	hexágono				

4. Observa las figuras y completa la tabla.



	Polígono de la base	Forma de caras laterales	Nombre del cuerpo	Aristas	Vértices
A					
B					
C					
D					
E					

5. Relaciona cada pirámide con la estrella que corresponde a su desarrollo.



LOS ORTOEDROS

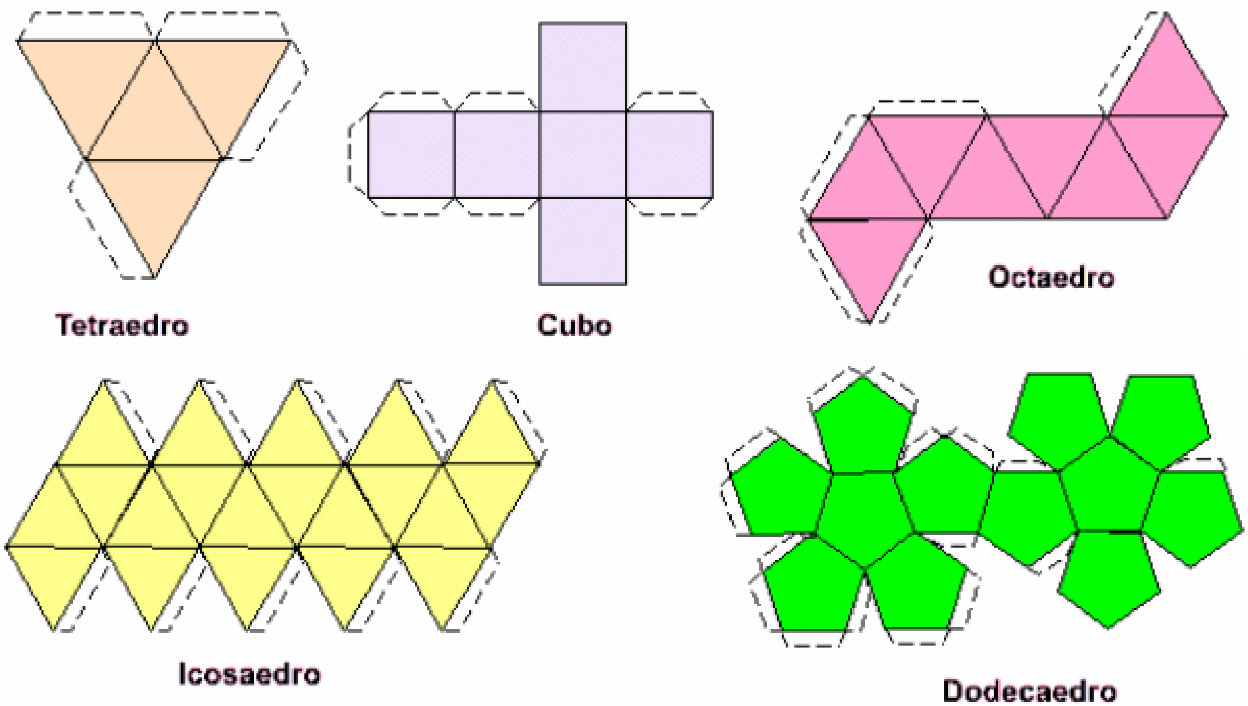
Los ortoedros son prismas cuyas caras son cuadrados, o rectángulos. Tienen 6 caras, 12 aristas y 8 vértices. El prisma cuadrangular es un ortoedro.

LOS POLIEDROS REGULARES

Un poliedro es regular cuando todas sus caras son polígonos iguales y regulares. Solo hay 5 poliedros regulares.

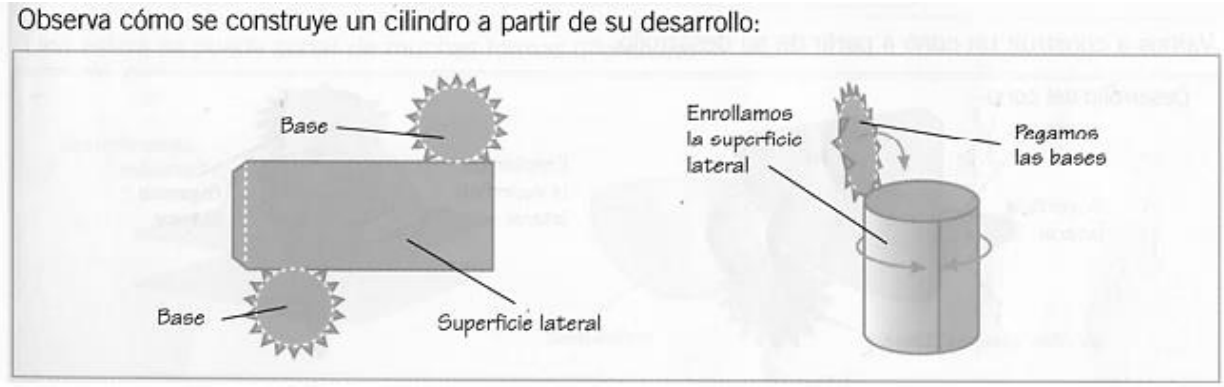
Hay 3 poliedros regulares con sus caras formadas por triángulos equiláteros.

Los otros dos poliedros tienen las caras formadas por cuadrados o por pentágonos:



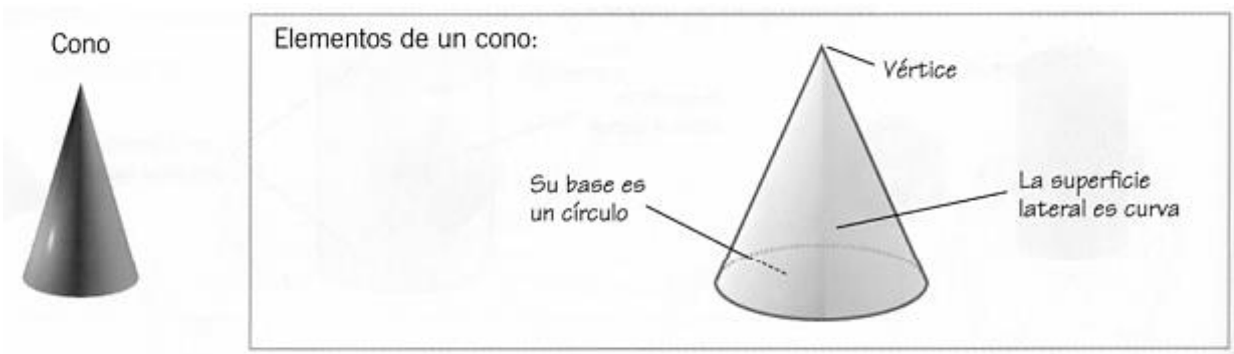
EL CILINDRO

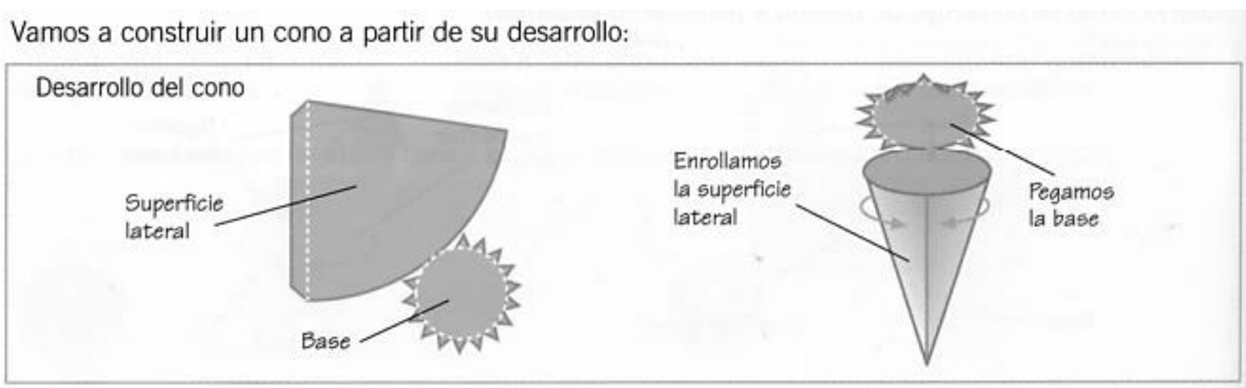
El cilindro es un cuerpo redondo que está formado por 2 bases iguales, que son círculos, y una superficie lateral curva.



EL CONO

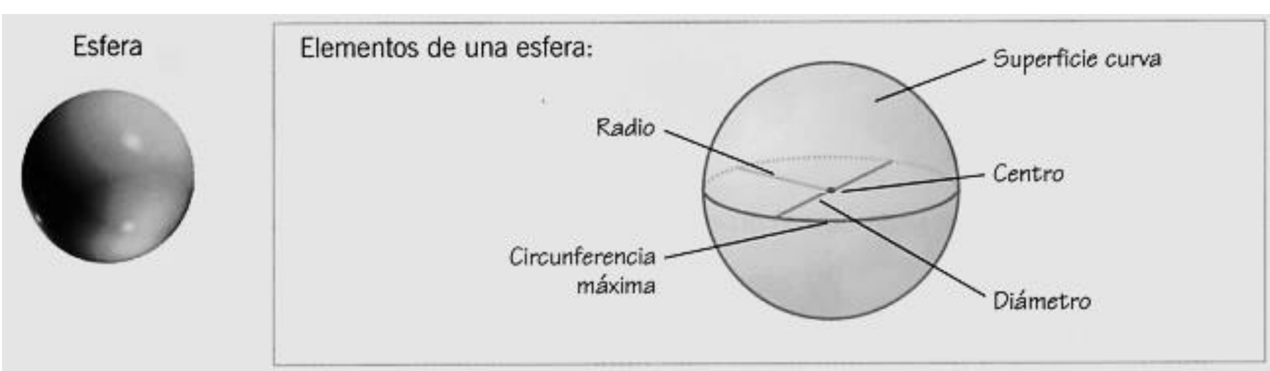
El cono es un cuerpo redondo que tiene una sola base, que es un círculo, y una superficie lateral curva.





LA ESFERA

La esfera es un cuerpo redondo, sin caras, formado por una sola superficie curva.

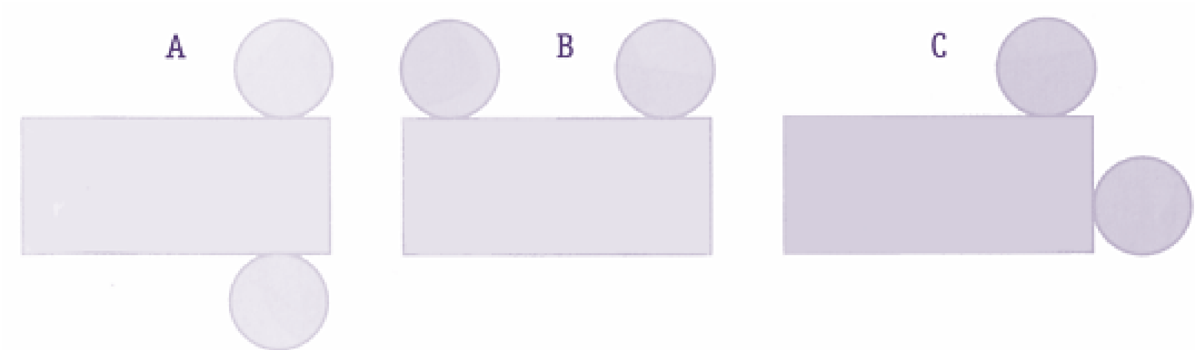


EJERCICIO 12. Realiza lo que se te pide, a continuación.

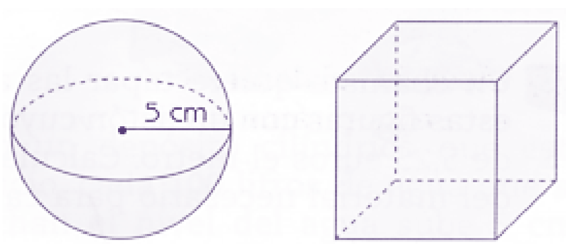
1. Completa la tabla:

Poliedro regular	Tetraedro			Dodecaedro	
Número de caras			8		
Polígono de sus caras		Cuadrado			Triángulo

2. ¿Cuál de las figuras corresponde al desarrollo de un cilindro?



3. Jorge intenta introducir la esfera en un cubo que tiene 9 cm de arista. ¿Lo logrará? ¿Por qué?



....

....

....

SOLUCIONES

EJERCICIO 01:

1. $15mn^2 = expresión\ grado\ 3$
2. $16x^3y^4 = expresión\ de\ grado\ 7$
3. $30v^2w^4 = expresión\ de\ grado\ 6$
4. $22xyx = expresión\ grado\ 3$
5. $36s^6 = expresión\ de\ grado\ 6$
6. $49abc = expresión\ de\ grado\ 3$
7. $62a^3b^6c^9 = expresión\ de\ grado\ 18$
8. $7xyz = expresión\ de\ grado\ 3$
9. $uvw = expresión\ de\ grado\ 3$
10. $150x^2y^3 = expresión\ de\ grado\ 5$
11. $36h = expresión\ de\ grado\ 1$
12. $48k^{10} = expresión\ de\ grado\ 10$
13. $27l^3 = expresión\ de\ grado\ 3$
14. $8y^3 = expresión\ de\ grado\ 3$
15. $60w^6 = expresión\ de\ grado\ 6$

EJERCICIO 02:

1. $20x - 60x^2 - 30y^6 = expresión\ de\ grado\ seis$
2. $7m^3n + 14\,m^2n^3 - 21mn^7 = expresión\ de\ grado\ siete$
3. $55pq + 75pq^5 = expresión\ de\ grado\ cinco$
4. $30m^4 - 6\,m^2 - m = expresión\ de\ grado\ 4$
5. $20xyz - 60xyz^3 - 30xyz^5 = expresión\ de\ grado\ 3$
6. $9u^2 + 18u^5 - 6u^3 + 3u - 2\quad expresión\ de\ grado\ 5$
7. $30mn - 15mn^2 - 30mn^3 = expresión\ de\ grado\ 3$
8. $5v^7 + 50v^5 - 45v^9 + 75 = expresión\ de\ grado\ 9$
9. $11yz - 22yz^4 - 33yz^7 = expresión\ de\ grado\ 7$
10. $b^2 + 18b^5 - 9b^3 + 3b - 3 = expresión\ de\ grado\ 5$

EJERCICIO 03:

1. $4x^5y + 5xy - 15x^3y^2 + 25\,x^5y^6 = trinomio$
2. $9mn = monomio$
3. $10a^2b^3 - 12abc + 15a^5b^2c^3 = trinomio$
4. $10m^4n + 15\,m^3n - 5mn^2 = trinomio$
5. $12w + 12v = binomio$
6. $xyz = monomio$
7. $7g + 35h - 14gh = trinomio$
8. $10xyz - 20\,xyz = binomio$
9. $x^3yz + 2xy^4z^5 - 4x^3y^2z = trinomio$
10. $10uv = monomio$

EJERCICIO 04:

1. $a^2 + 2a = a(a + 2)$
2. $10b - 30ab^2 = 10\mathrm{b}(1 - 3\mathrm{ab})$
3. $10a^2 + 5a + 15a^3 = 5a(2a + 1 + 3a^2)$
4. $a^2 + ab = a(a + b)$
5. $b + b^2 = b(1 + b)$
6. $x^2 + x = x(x + 1)$
7. $3a^3 - a^2 = a^2(3a - 1)$
8. $x^3 - 4x^2 = x^2(x - 4)$
9. $5m^2 + 15m^3 = 5\mathrm{m}^2(1 + 3\mathrm{m})$
10. $ab - bc = \mathrm{b}(\mathrm{a} - \mathrm{c})$
11. $8\,m^2 - 12mn = 4m(2m - 3n)$
12. $15c^3 3d^2 + 60c^2 2d^3 = 15c^2d^2(c + 4d)$
13. $a^3 + a^2 + a = a(a^2 + a + 1)$
14. $15y^3 + 20y^2 - 5y = 5y(3y^2 + 4y - 1)$
15. $2u^2 - u = 2u - 1$

EJERCICIO 05:

1. $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
2. $49m^6 - 70am^3n^2 + 25a^2n^4 = (7m^3 - 5an^2)^2$
3. $9b^2 - 30ab + 25a^2 = (3b - 5a)^2$
4. $b^2 - 12\mathrm{b} + 36 = (b - 6)^2$
5. $25x^2 + 70xy + 49y^2 = (5x + 7y)^2$
6. $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$

7. $4a^2 + 4a + 1 = (2a+1)^2$

8. $1 + 6a + 9a^2 = (1+3a)^2$

9. $16m^2 - 40mn + 25n^2 = (4m - 5n)^2$

10. $25a^2c^2 + 20acd + 4d^2 = (5ac + 2d)^2$

EJERCICIO 06:

1. $(1-a)^2 = (1+a)(1-a)$

2. $16x^2 - 25y^4 = (4x + 5y^2)(4x - 5y^2)$

3. $49x^2y^6z^{10} - a^{12} = (7xy^3z^5 + a^6)(7xy^3z^5 - a^6)$

4. $a^{2n} - 9b^{4m} = (a^n + 3b^{2m})(a^n - 3b^{2m})$

5. $\frac{a^2}{4} - \frac{b^4}{9} = \left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{b^2}{3}\right)$

6. $9a^2 - 25b^2 = (3a + 5b)(3a - 5b)$

7. $4x^2 - 1 = (4x + 1)(4x - 1)$

8. $3x^2 - 12 = (3x - 6)(x + 2)$

9. $8y^2 - 18 = (9y - 9)(2y + 2)$

10. $16x^2 - 100 = (4x - 10)(4x + 10)$

EJERCICIO 07:

1. $2x^2 + 3x - 2 = (x + 2)(2x - 1)$

2. $15m^2 + 16m - 15 = (3m + 5)(5m - 3)$

3. $30x^2 + 13x - 10 = (6x + 5)(5x - 2)$

4. $6m^2 - 13am - 15a^2 = (m - 3a)(bm + 5a)$

5. $18a^2 + 17ay - 15y^2 = (2a + 3y)(9a - 5y)$

6. $20x^2 + 7x - 6 = (4x + 3)(5x - 2)$

7. $18a^2 - 13a - 5 = (a - 1)(18a + 5)$

8. $6x^2 - 7x - 3 = (3x + 1)(2x - 3)$

9. $20x^2 + 7x - 6 = (4x + 3)(5x - 2)$

10. $2x^2 + 3x - 2 = (x + 2)(2x - 1)$

EJERCICIO 08:

1. $m^3 + 15m^2 + 75m + 125 = (m + 5)^3$

2. $a^3 + 3a^2 + 3a + 1 = (a + 1)^3$

3. $64x^9 - 125y^{12} - 240x^6y^4 + 300x^3y^8 = (4x^3 - 5y^4)^3$

4. $125x^{12} + 600x^8y^5 + 960x^4y^{10} + 512y^{15} = (5x^4 + 8y^5)^3$

5. $216^3 - 756x^2y^2z + 882xy^4z^2 - 343y^6z^3 = (6x - 7y^2z)^3$

6. $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$

Se extrae la raíz cúbica del 1° y 4° términos:
raíz cúbica de $8x^3$ = ***2x*** y raíz cúbica de 1 = ***1***

Se comprueba el 2° y 3° término de la expresión:

2° término: $3(2x)^2(1) = 3(4x^2)(1) = \boldsymbol{12x^2}$
3° término: $3(2x)(1)^2 = 3(2x)(1) = \boldsymbol{6x}$

Como todos los términos de la expresión son positivos la el binomio resultante de la expresión es:

$8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 = \boldsymbol{(2x+1)^3}$, ***que es la Solución.***

7. $8x^6 + 54x^2y^6 - 27y^9 - 36x^4y^3$

En este caso se ordena la expresión en relación a la letra "x" y quedaría así:

$8x^6$ $-36x^4y^3$ $+ 54x^2y^6$ $-27y^9$ ->

Se extrae la raíz cúbica del 1° y 4° término:
raíz cúbica de 8x^6 = ***$2x^2$*** ; raíz cúbica de $27y^9$ = ***$3y^3$***

Se comprueba el 2° y 3° término de la expresión:
2° término: $3(2x^2)^2(3y^3) = 3(4x^4)(3y^3) =$ ***$36x^4y^3$***
3° término: $3(2x^2)(3y^3)^2 = 3(2x^2)(9y^6) =$ ***$54x^2y^6$***

Como los términos de la expresión son alternativamente positivos y negativos (+, -, +, **–**) el binomio resultante de la expresión es: $8x^6$ $-36x^4y^3$ $+54x^2y^6$ $-27y^9$ **=** ***$(2x^2 -3y^3)^3$, que es la Solución.***

8. $a^3 + 3a^2 + 3a + 1$

Factorar a^3 $+3a^2$ $+3a$ $+1$

Raíz cúbica de a^3 = ***a*** ; raíz cúbica de 1 = ***1***

2° término: $3(a)^2(1) = 3(a^2)(1) =$ **$3a^2$ OK**
3° término: $3(a)(1)^2 = 3(a)(1) =$ ***3a OK***

Signos positivos -> ***$(a+1)^3$***

Por lo tanto: a^3 $+3a^2$ $+3a$ $+1$ **=** ***$(a+1)^3$ Solución.***

9. $27 - 27x + 9x^2 - x^3$

Factorar 27 -27x $+9x^2$ $-x^3$ (Está ordenado de menor a mayor grado).

Raíz cúbica de 27 = ***3*** ; raíz cúbica de x^3 = ***x***

2° término: $3(3)^2(x) =3(9)(x) =$ ***27x OK***
3° término : $3(3)(x)^2 = 3(3)(x^2) =$ ***$9x^2$ OK***

Signos alternos (x, -, +, -) -> **$(3 -x)^3$**

Por lo tanto: 27 -27x $+9x^2$ $-x^3$ = ***$(3 -x)^3$ Solución.***

10. $m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3$

Factorar m^3 $+3m^2n$ $+3mn^2$ $+n^3$

Raíz cúbica de m^3 = ***m*** ; n^3 = ***n***

2° término: $3(m)^2(n) = 3(m^2)(n) =$ ***$3m^2n$ OK***
3° término: $3(m)(n)^2 = 3(m)(n^2) =$ ***$3mn^2$ OK***

Signos positivos -> **$(m+n)^3$**

Por lo tanto: m^3 $+3m^2n$ $+3mn^2$ $+n^3$ **=** ***$(m+n)^3$ Solución.***

EJERCICIO 09:

1. $1 + a^3 = (1 + a)(1 - a + a^2)$

2. $x^3 - 27 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$

3. $x^6 - 8y^{12} = (x^2 - 2y^4)(x^4 + 2x^2y^4 + 4y^8)$

4. $(m - 2)^3 + (m - 3)^3 = (2m - 5)(m^2 - 5m + 7)$

5. $(x-y)^3 - 8 = (x-y-z)(x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 2y + 4)$

6. $a^3 + b^3$

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

La suma de dos cubos perfectos, es igual a la suma de sus raíces cúbicas, ***(a+b)***; multiplicado por el cuadrado de la 1° raíz cúbica, ***a^2*, *menos*** el producto de las dos raíces cúbicas, ***ab***, ***más*** el cuadrado de la 2° raíz cúbica, ***b^2***.

Ejemplo: Factorar o descomponer en 2 factores ***$27m^6 + 64n^9$***

1° Se encuentra las raíces cúbicas de
$27m^6$ = ***$3m^2$*** y $64n^9$ = ***$4n^3$***

–> Desarrollando la Regla:

Suma de las raíces cúbicas: ***($3m^2+4n^3$***)
Cuadrado de la 1° raíz cúbica: $(3m^2)^2$ = ***$9m^4$***
Productos de las 2 raíces cúbicas: $(3m^2)(4n^3)$ = ***$12m^2n^3$***
Cuadrado de la 2° raíz cúbica: $(4n^3)^2$ = ***$16n^6$***

–> $27m^6+64n^9$ = **$(3m^2+4n^3)(9m^4 - 12m^2n^3 + 16n^6)$ Solución**.

7. $a^3 - b^3$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

La diferencia de dos cubos perfectos, es igual a la diferencia de sus raíces cúbicas, ***(a-b***); multiplicado por el cuadrado de la 1° raíz cúbica, ***a^2***, *más* el producto de las dos raíces cúbicas, ***ab***, ***más*** el cuadrado de la 2° raíz cúbica, ***b^2.***

Ejemplo: ***Descomponer en 2 factores $8x^3 - 125$***
1° Se encuentra las raíces cúbicas de:
$8x^3$ = ***2x*** y 125 = ***5***

–> Desarrollando la Regla:

Suma de las raíces cúbicas: ***(2x -5)***
Cuadrado de la 1° raíz cúbica: $(2x)^2$ = ***$4x^2$***
Producto de las 2 raíces cúbicas: (2x)(5) = ***10x***

Cuadrado de la 2° raíz cúbica: $(5)^2$ = ***25***

–> 8x^3 -125 = **(2x -5)(4x^2 +10x +25) Solución.**

8. $1 - a^3$

Raíz cúbica de 1 = **1** y Raíz cúbica de a^3 = ***a***

Diferencia de las raíces cúbicas: ***(1 -a***)
Cuadrado de la 1° raíz cúbica: $(1)^2$ = ***1***
Producto de las raíces cúbicas: (1)(a) = **a**

Cuadrado de la 2° raíz cúbica: $(a)^2$ = ***a^2***

–> $1 - a^3$ = ***$(1-a)(1+a+a^2)$ Solución.***

9. $x^3 + y^3$

Raíz cúbica de x^3 = ***x*** Raíz cúbica de y^3 = ***y***

Suma de las raíces cúbicas: ***(x +y)***
Cuadrado de la 1° raíz cúbica: $(x)^2$ = $\mathbf{x^2}$
Producto de las raíces cúbicas: (x)(y) = **xy**
Cuadrado de la 2° raíz cúbica: $(y)^2$ = $\boldsymbol{y^2}$

–> $x^3 + y^3$ = $\boldsymbol{(x + y)(x^2 - xy + y^2)}$ ***Solución.***

10. $64 + a^6$

Raíz cúbica de 64 = ***4*** Raíz cúbica de a^6 = ***a^2***

Suma de las raíces cúbicas: $(4 + a^2)$
Cuadrado de la 1° raíz cúbica: $(4)^2$ = **16**
Producto de las raíces cúbicas: $(4)(a^2)$ = $\boldsymbol{4a^2}$
Cuadrado de la 2° raíz cúbica: $(a^2)^2$ = $\boldsymbol{a^4}$

–> $64 + a^6$ = $\boldsymbol{(4 + a^2)(16 - 4a^2 + a^4)}$ ***Solución.***

Recordatorio:

Para elevar una potencia a otra potencia; Se eleva el coeficiente a la otra potencia, se copia la literal y se multiplican los exponentes: $(a^2)^2 = a^{2*2} = a^4$

Para encontrar la raíz cúbica de una potencia, se extrae la raíz cúbica del coeficiente, se copia la literal y se divide el exponente de la potencia entre el índice de la raíz cúbica (3): $a^6 = a^6/3 = a^2$.

EJERCICIO 10 AL EJERCICIO 12.

EL ALUMNADO EN CONJUNTO CON SU CATEDRÁTICO(A), DEBEN LEER; ANALIZAR E INVESTIGAR (SI FUESE NECESARIO) PARA ENCONTRARLE SOLUCIÓN A CADA UNO DE LOS EJERCICIOS.

INFORMACIÓN (INCLUÍDA EN ESTE DOCUMENTO EDUCATIVO) TOMADA DE:

Sitios web:

http://solecito21roch.blogspot.com/2012/09/la-circunferencia-sus-rectas-segmentos.html

http://www.aulafacil.com/cursos/l10955/ciencia/matematicas/algebra/cubo-perfecto-de-binomios-cuatrinomio

http://www.clarionweb.es/5_curso/matematicas/tema515.pdf

http://www.disfrutalasmatematicas.com/geometria/circulos-sectores-segmentos.html

http://www.profesorenlinea.cl/matematica/AlgebraProductosnotables.htm

http://www.sangakoo.com/es/temas/binomio-de-newton-y-triangulo-de-pascal

https://ejerciciosalgebra.wordpress.com/2012/09/13/caso-viii-cubo-perfecto-de-binomios/

https://ejerciciosalgebra.wordpress.com/2012/10/11/caso-ix-suma-o-diferencia-de-cubos-perfectos/

https://www.portaleducativo.net/primero-basico/110/Cuerpos-geometricos-conceptosbasicos

https://www.portaleducativo.net/segundo-basico/50/Identificacion-de-caras-aristas-vertices-en-cuerpos-geometricos

https://www.portaleducativo.net/segundo-basico/51/Identificacion-angulos