CBS
Colegio Bautista Shalom

Matemática V
Quinto BADC
Primer Bimestre

Contenidos

SISTEMA DE ECUACIONES

- ✓ ECUACIONES DE PRIMER GRADO.
- ✓ ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA.
- ✓ SISTEMAS DE DOS ECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS.
- ✓ LOS SISTEMAS DE ECUACIONES.
- ✓ EXPRESIÓN MATRICIAL DE UN SISTEMA.
- ✓ SISTEMAS DE DOS ECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS.
- ✓ MÉTODO DE SUSTICIÓN.
- ✓ MÉTODO DE REDUCCIÓN.
- ✓ MÉTODO DE IGUALACIÓN.
- ✓ CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS, SEGÚN SU SOLUCIÓN.
- ✓ INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE UN SISTEMA.

ECUACIONES LINEALES

- ✓ SOLUCIÓN DE ECUACIONES LINEALES POR MÉTODO DE DETERMINANTES.
- ✓ DETERMINANTE.
- ✓ REGLA DE KRAMER.

SISTEMAS DE TRES ECUACIONES DE PRIMERO GRADO CON TRES INCÓGNITAS

- ✓ SOLUCIÓN POR MÉTODO DE SUSTITUCIÓN.
- ✓ SOLUCIÓN POR MÉTODO DE REDUCCIÓN.

NOTA: conforme vayas avanzando en tu aprendizaje, encontrarás ejercicios que debes resolver. Sigue las instrucciones de tu catedrático(a).

SISTEMA DE ECUACIONES

Definición: se conoce como sistemas ecuaciones a todo conjunto o agrupación de ecuaciones distintas que poseen una o más soluciones comunes. Para resolver un sistema de ecuaciones que sean simultáneas, es necesario hallar el conjunto de valores que satisfacen simultáneamente cada una de sus ecuaciones.

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1x + 2y = \boxed{5} \\ 2x - 1y = \boxed{0} \end{cases}$$

columna de términos independientes

coeficientes

Características:

- ✓ Un sistema es *consistente* si tiene por lo menos una solución.
- ✓ Un sistema con un número infinito de soluciones es *dependiente y consistente.*
- ✓ Un sistema es *inconsistente* si carece de solución.

Recuerda que, para la solución de los sistemas de ecuaciones es necesario:

- ✓ Quitar denominadores, en caso existan en la expresión.
- ✓ Se debe multiplicar ambos lados de la igualdad por el mínimo común múltiplo de los denominadores.
- ✓ Quitar paréntesis, en caso existan.
- ✓ Pasa todos los términos que contenga la incógnita a un lado de la igualdad y los demás al otro lado.
- ✓ Todo sumando de un lado de la igualdad pasa al otro con el signo opuesto.
    - Se le suma en ambos lados el opuesto del número que queremos eliminar.
    - Si está multiplicando, se elimina multiplicando ambos lados por el inverso del número que queremos eliminar de ese lado.

Nota: Puede haber casos en los cuales el sistema no tenga solución.

ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Son las igualdades algebraicas con incógnitas cuyo exponente es 1. Esto se lee: elevada a la potencia uno, la cual no se escribe en la ecuación. Como procedimiento para resolver ecuaciones enteras de primer grado se deben seguir los siguientes pasos:

1. Se reducen los términos semejantes, cuando es posible.
2. Se hace la transposición de términos (aplicando inverso aditivo o multiplicativo), los que contengan la incógnita se ubican en el miembro izquierdo, y los que carezcan de ella en el derecho.
3. Se reducen términos semejantes, hasta donde es posible.
4. Se despeja la incógnita, dividiendo ambos miembros de la ecuación por el coeficiente de la incógnita (inverso multiplicativo), y se simplifica.

ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

Para resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita, aplicamos el criterio del operador inverso (inverso aditivo o inverso multiplicativo).

Por ejemplo: $2x - 3 = 53$

Debemos tener las letras a un lado y los números al otro lado de la igualdad (=). En este caso para despejar el −3 al otro lado de la igualdad, le aplicamos el inverso aditivo (el inverso aditivo de −3 es +3, porque la operación inversa de la resta es la suma).

$$2x - 3 + 3 = 53 + 3$$

En el primer miembro −3 se elimina con +3 y tendremos:

$$2x \cancel{- 3 + 3} = 53 + 3$$

$$2x = 53 + 3$$

Ahora tenemos el número 2 que está multiplicando a la variable o incógnita “x”, entonces lo pasaremos al otro lado de la igualdad dividiendo. Para hacerlo, aplicamos el inverso multiplicativo de 2 (que es ½) a ambos lados de la ecuación:

$$2x = 56$$

$$2x \cdot \frac{1}{2} = 56 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{56}{2}$$

Simplificamos y tendremos ahora:

$$\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} = \frac{56}{2}$$

$$x = \frac{56}{2}$$

$x = 28$ Entonces el valor de la incógnita o variable "x" es 28.

Para comprobar si el resultado es el correcto, el mismo será sustituido en ecuación original y así se comprobará la igualdad.

$$2x - 3 = 53$$

$$x = 28$$

EJERCICIO 01: encuentra el valor de la incógnita resolviendo las siguientes ecuaciones de primer grado con una incógnita. Has la demostración que el valor encontrado sustituyéndolo por la variable de la ecuación original, hace verdadera la igualdad.

1) $3 \cdot x + 5 = 3 - 2 \cdot x$

2) $3 \cdot x - 2 \cdot (x + 1) = 2 \cdot (3 \cdot x - 1) + 4$

3) $3 \cdot (1 - 2 \cdot x) - 4 \cdot (1 - x) = x - 2 \cdot (1 + x)$

4) $\frac{x-1}{2} = \frac{2-x}{3}$

5) $x - 15 = -27$

6) $-11x + 12 = 144$

7) $-8x - 15 = -111$

8) $6x - 10 = -16$

9) $-15x - 6 = 9$

10) $12x + 12 = 72$

11) $-10x + 9 = -81$

12) $5x - 15 = 15$

13) $2x - 13 = -19$

14) $7x + 5 = -100$

15) $-12x - 15 = 9$

16) $5x - 14 = -74$

17) $13x - 13 = 169$

18) $x - 3 = -13$

19) $6x + 10 = -38$

20) $6x - 9 = -27$

21) $-3x + 3 = -33$

22) $-4x + 8 = 4$

23) $-14x - 7 = 77$

24) $8x - 5 = -109$

25) $2x + 6 = -12$

Ejercicios tomados del portal educa.mx con fines de aprendizaje de los alumnos.

LOS SISTEMAS DE ECUACIONES

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + a_{13}\cdot x_3 + \cdots + a_{1n}\cdot x_n = b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + a_{23}\cdot x_3 + \cdots + a_{2n}\cdot x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + a_{m3}\cdot x_3 + \cdots + a_{mn}\cdot x_n = b_m \end{array}\right\}$$

En la demostración anterior tenemos demostrado un sistema de “m” ecuaciones y “n” incógnitas. En este caso los números reales a_{ij} se denominan coeficientes y las x_i se denominan incógnitas (números a determinar el sistema) y b_j se denominan términos independientes. En el caso de que las incógnitas sean 2 se suelen designar simplemente por “x” e “y” en vez de “x_1” y “x_2”. En el caso que existan tres, entonces: x, y, z en lugar de x_1, x_2 y x_3.

Resolver el sistema consiste en calcular las incógnitas para que se cumplan TODAS las ecuaciones del sistema simultáneamente. Diremos que dos sistemas son equivalentes cuando tienen las mismas soluciones.

EXPRESIÓN MATRICIAL DE UN SISTEMA

Cualquier sistema de ecuaciones lineales se puede expresar en forma matricial del modo:

$$\underset{\text{m x n}}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}} \cdot \underset{\text{n x 1}}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}} = \underset{\text{m x 1}}{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}$$

La matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ se llama *matriz de coeficientes*, la matriz $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

se llama *matriz de incógnitas*, y la matriz $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ se llama *matriz de términos independientes.*

La matriz formada por A y B conjuntamente, es decir:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Se llama matriz ampliada del sistema y se representa por (A|B) o bien por A*.

Ejemplo:

El sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x + y - z = 5 \\ x + y = 7 \\ 2x + 2y - z = 12 \end{array}\right\}$$

Escrito matricialmente es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix}$$

La matriz ampliada es:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & 2 & -1 & 12 \end{array}\right)$$

En general, buscaremos las soluciones de los sistemas en los números reales R.

Dependiendo del posible número de tales soluciones reales que tenga un sistema, estos se pueden clasificar en:

Sistemas Incompatibles = es decir, sistemas que no tienen solución.

Sistemas Compatibles = estos se subdividen en:

Determinados = es decir, poseen única solución.
Indeterminados = es decir, poseen infinitas soluciones.

SISTEMAS DE DOS ECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS

Un sistema está formado por dos semi-ecuaciones (arriba y abajo), que siempre debemos ordenar de forma que delante del igual siempre haya las dos letras y detrás el término independiente.

Los sistemas más sencillos son aquellos que poseen sólo 2 incógnitas y 2 ecuaciones. Existen métodos para resolverlos. A continuación, se te presentan estos métodos de solución:

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

Consiste en despejar cualquiera de las incógnitas en una de las ecuaciones y sustituir su valor en la otra.

Apliquemos el proceso al sistema: $\begin{cases} x+2y-3=0 \\ \frac{1}{2}x-3y=5 \end{cases}$

1. Despejamos x en la primera ecuación: $x=3-2y$.
2. Sustituimos este valor de x en la segunda: $\frac{1}{2}(3-2y)-3y=5$
3. Resolvemos esta ecuación:

$$\frac{1}{2}(3-2y)-3y=5 \Leftrightarrow \frac{3}{2}-y-3y=5 \Leftrightarrow -4y=5-\frac{3}{2} \Leftrightarrow y=\frac{7}{2}:(-4)=-\frac{7}{8}$$

Con este valor de y, hallamos x: $x=3-2(-\frac{7}{8})=3+\frac{14}{8}=\frac{19}{4}$

La solución del sistema es: $x=\frac{19}{4};\ y=-\frac{7}{8}$.

Sea el sistema:

$$\begin{cases} 3x+y=11 \\ 5x-y=13 \end{cases}$$

Pasos que seguir:

Primero en una de las ecuaciones se halla el valor de una de las incógnitas. Despejamos la y en la primera ecuación suponiendo como conocido el valor de "x":

$$y=11-3x$$

Se sustituye en la otra ecuación el valor anteriormente hallado, es decir donde se encuentre una "y" colocaremos "(11 – 3x)".

$$5x-(11-3x)=13$$

Ahora, tenemos una ecuación con una sola incógnita; la cual resolvemos normalmente:

$$5x-11+3y=13$$

$$5x+3x=13+11$$

$$8x=24$$

$$x=3$$

Ya conocido el valor de x lo sustituimos en la expresión del valor de "y" que obtuvimos a partir de la primera ecuación del sistema:

$$y = 11 - 3x$$

$$y = 11 - 9$$

$$y = 2$$

Así, la solución al sistema de ecuaciones propuesto será x=3 e y=2

Ejemplo:

$$\begin{cases} x + 2y = -3 \\ 3x + 6y = -9 \end{cases}$$

Resolviendo por el método de sustitución, tenemos:

$$x = -2y - 3$$

Ahora, sustituyendo este despeje en la otra ecuación. Sustituyendo a "x":

$$3x + 6y = -9$$

$$3(-2y - 3) + 6y = -9$$

Se realiza el producto entre el coeficiente y los miembros del paréntesis:

$$3(-2y - 3) + 6y = -9$$

$$-6y - 9 + 6y = -9$$

Se deja del lado izquierdo a los términos y del lado derecho a los coeficientes:

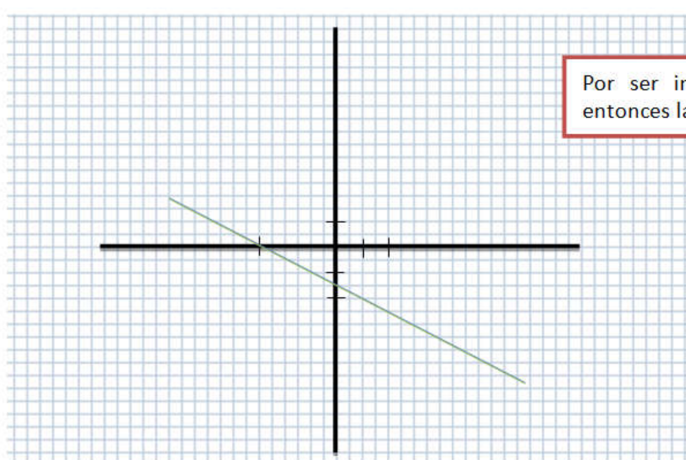
$$-6y - 9 + 6y = -9$$

$$-6y + 6y = -9 + 9$$

$$0y = 0$$

$$0 = 0$$

Como 0 = 0 es una igualdad siempre cierta, quiere decir que el sistema tiene infinitas soluciones, es compatible indeterminado, o que las rectas son la misma.



Por ser infinitas soluciones, entonces las rectas coinciden.

Lo expresaremos así:

Como x = −2y − 3, dando valores a y se obtiene "x". Entonces, si le damos a y el valor arbitrario de λ (lambda), entonces expresaremos la solución como:

$$\left.\begin{array}{r} x = -2\lambda - 3 \\ y = \lambda \end{array}\right\} \text{siendo } \lambda \in \mathbb{R}$$

y como λ puede ser cualquier número real, hay infinitas soluciones. Estos son los únicos casos que pueden darse con dos ecuaciones y dos incógnitas, y su interpretación geométrica.

EJERCICIO 02: resolver los siguientes sistemas de ecuaciones por medio del método de sustitución.

1.− $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$ *R*: [1; −1]

2.− $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 1.5x - 2y = 5 \end{cases}$ *R*: [2; −1]

3.− $\begin{cases} 2x - \dfrac{5y}{3} = 5 \\ 3x - 4y = 3 \end{cases}$ *R*: [5; 3]

4.− $\begin{cases} 5x + 6y = 32 \\ 3x - 2y = -20 \end{cases}$ R: [−2; 7]

5.− $\begin{cases} 6x + 3y = 3.5 \\ 5x - 2y = \dfrac{2}{3} \end{cases}$ *R*: [1/3; 1/2]

6.− $\begin{cases} 5x - 6y = -9 \\ 3x + 4y = -13 \end{cases}$ *R*: [−3; −1]

7.− $\begin{cases} \dfrac{x}{5} - 2y = 10 \\ 3x - \dfrac{3y}{2} = 36 \end{cases}$ *R*: [10; −4]

8.− $\begin{cases} x + 8y = 3 \\ 3x - y = -28.5 \end{cases}$ *R*: [−9; 3/2]

9.− $\begin{cases} 2x - 4y = 5 \\ 3x + y = 5.75 \end{cases}$ *R*: [2; −1/4]

10.− $\begin{cases} x + 2.y = -12 \\ 3x - y = -1 \end{cases}$ *R*: [−2; −5]

MÉTODO DE REDUCCIÓN

Este método busca la eliminación de una incógnita en alguna de las ecuaciones. Para ello:

1. Se multiplican las ecuaciones por sendos números de modo que se consigan igualar, en valor absoluto, los coeficientes de una de las incógnitas.
2. Se suman o restan ambas ecuaciones para eliminar esa incógnita.

Por ejemplo, si en el sistema $\begin{cases} x - y = 4 \\ 2x + 8y = -2 \end{cases}$, a la segunda ecuación le restamos el doble de la primera ($E2 - 2E1$), queda:

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ [2x + 8y = -2] - 2[x - y = 4] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 4 \\ 10y = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 4 \\ y = -1 \end{cases}$$

cuya solución es ya inmediata, pues sustituyendo en $E1$: $x - (-1) = 4 \Rightarrow x = 3$.

Por tanto, la solución del sistema es $x = 3$, $y = -1$.

Tenemos el siguiente sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas.

$$\begin{cases} 6x - 7y = 5 \\ 8x - 9y = 7 \end{cases}$$

Multiplicamos las 2 ecuaciones por un "número" (resultado del m. c. m. entre ellos), para igualar el valor numérico de los coeficientes de la incógnita "x" en las 2 ecuaciones.

$$\begin{cases} 6x - 7y = 5 \\ 8x - 9y = 7 \end{cases} \quad \ldots \text{m.c.m.} = 24$$

$$\begin{cases} 6x - 7y = 5 \\ 8x - 9y = 7 \end{cases} \quad \begin{matrix} \ldots (\times 4) \\ \ldots (\times 3) \end{matrix}$$

$$\begin{cases} 24x - 28y = 20 \\ 24x - 27y = 21 \end{cases}$$

Restamos las 2 ecuaciones para eliminar las incógnitas "x" luego resolvemos la ecuación.

$$\begin{cases} \cancel{24x} - 28y = 20 \\ \cancel{-24x} + 27y = -21 \end{cases}$$
$$-y = -1 \quad \ldots\ldots (\times -1)$$
$$\mathbf{y = 1}$$

Reemplazamos la incógnita "y", en cualquiera de las 2 ecuaciones para obtener el valor de la incógnita "x" o bien se calcula está incógnita repitiendo los pasos anteriores.

$$6x - 7y = 5$$
$$6x - 7(1) = 5$$
$$6x - 7 = 5$$
$$6x = 5 + 7$$
$$6x = 12$$
$$x = \frac{\cancel{12}^{\,2}}{\cancel{6}_{\,1}}$$
$$x = 2$$

El conjunto solución es: $(2,1)$

EJERCICIO 03: resolver los siguientes sistemas de ecuaciones por medio del método de reducción.

1.– $\begin{cases} 2x - 4y = -7 \\ x + 8y = -1 \end{cases}$

2.– $\begin{cases} 5x + 4y = 2 \\ 3x - 2y = -12 \end{cases}$

3.– $\begin{cases} 2x - \frac{5y}{3} = 5 \\ 3x - 4y = 3 \end{cases}$

4.– $\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = -1 \end{cases}$

5.– $\begin{cases} -2x - 4y = 18 \\ x + 5y = -36 \end{cases}$

6.– $\begin{cases} 3x - 3y = -14 \\ 9x + 4y = 23 \end{cases}$

7.– $\begin{cases} x - 5y = -14.5 \\ 2x + 3y = 10 \end{cases}$

8.– $\begin{cases} 3x - 5y = 19 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$

9.– $\begin{cases} -9x - 12y = 14 \\ 30x + 6y = -58 \end{cases}$

10.– $\begin{cases} 2x - 2y = -5 \\ 4x - 3y = -9 \end{cases}$

MÉTODO DE IGUALACIÓN

Este método consiste en despejar e igualar la misma incógnita en ambas ecuaciones. A continuación se resuelve la ecuación resultante.

En el sistema $\begin{cases} x - y = 4 \\ 2x + 8y = -2 \end{cases}$ vamos a despejar la incógnita x en las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} x = 4 + y \\ 2x = -2 - 8y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 + y \\ x = -1 - 4y \end{cases}$$

Igualamos los segundos miembros: $4 + y = -1 - 4y \Leftrightarrow 5y = -5 \Leftrightarrow y = -1$

Como $x = 4 + y \Rightarrow x = 3$.

La solución del sistema es $x = 3$, $y = -1$.

Si se hubiera despejado la incógnita y en ambas ecuaciones, el resultado hubiese sido el mismo.

Sea el sistema:

$$\begin{cases} 3x + y = 11 \\ 5x - y = 13 \end{cases}$$

Lo primero que haremos será despejar en las dos ecuaciones la misma incógnita

$$\begin{cases} y = 11 - 3x \\ y = -13 + 5x \end{cases}$$

Igualamos ambas ecuaciones:

$$11 - 3x = -13 + 5x$$

$$11 - 3x = -13 + 5x$$

$$-5x - 3x = -13 - 11$$

$$[-8x = -24] - 1$$

$$8x = 24$$

$$x = \frac{24}{8}$$

$$x = 3$$

Este valor de “x” lo sustituimos en cualquiera de las ecuaciones de “y”.

$$y = 11 - 3x$$

$$y = 11 - 3(3)$$

$$y = 11 - 9$$

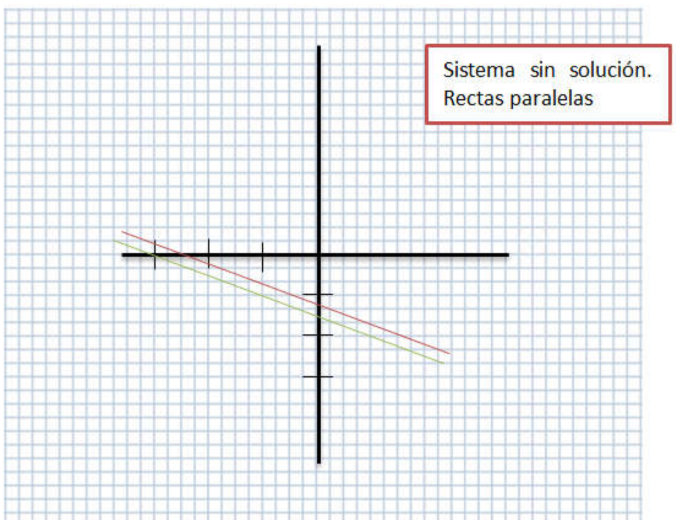
$$y = 2$$

Resolver e interpretar el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y = -3 \\ -2x - 4y = 5 \end{array}\right\}$$

$$-3 - 2y = \frac{5 + 4y}{-2} \Longrightarrow 4y + 6 = 5 + 4y \Longrightarrow 0y = -1 \Longrightarrow 0 = -1$$

Esto es imposible, y por tanto el sistema no tiene solución, es un sistema incompatible y por tanto las rectas son paralelas. Geométricamente:



EJERCICIO 04: resolver los siguientes sistemas de ecuaciones por medio del método de igualación.

1. $\begin{cases} 5x - y = 9 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x - 4y = -7 \\ x + 8y = -1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} -3x - 4y = 5 \\ -x - 2y = 2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} \frac{x}{5} - \frac{y}{2} = 1.3 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x - \frac{y}{2} = -9.5 \\ \frac{3x}{5} + y = -4 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x + 2y = -10 \\ 2x - 10y = -1 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 5x - y = \frac{1}{2} \\ 2x + 3y = -10 \end{cases}$

8. $\begin{cases} -3x + 15y = 59 \\ 3x + 4y = 17 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 3x - 5y = 19 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$

10. – $\begin{cases} 3x - y = -\frac{1}{2} \\ \frac{4x}{5} + 3y = 6.4 \end{cases}$

CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS, SEGÚN SU SOLUCIÓN

Los sistemas que tienen solución se llaman **compatibles.**

1. Si la solución es única se llaman **compatibles determinados.**
2. Si tienen infinitas soluciones se llaman **compatibles indeterminados.**

Si un sistema carece de soluciones se dice que es **incompatible.**

Por ejemplo, el sistema:

$$\begin{cases} 30x - 20y = 130 \\ 3x - 2y = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10\,(3x - 2y) = 10 \cdot 13 \\ 3x - 2y = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 13 \\ 3x - 2y = 13 \end{cases}$$

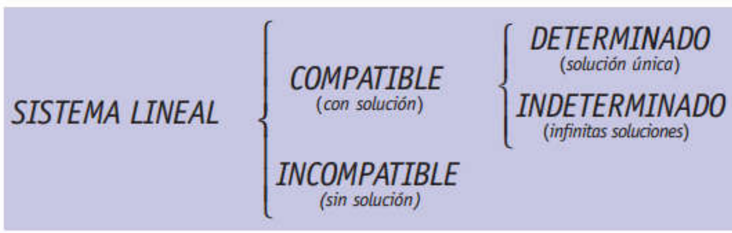
es equivalente, en realidad, a una sola ecuación con dos incógnitas que, como ya sabemos, tienen infinitas soluciones; en este caso: (3, -2), (1, -5), (5, 1). . . Por tanto, el sistema es compatible determinado.

Sin embargo, el sistema:

$$\begin{cases} 14x - 40y = 0 \\ 7x - 20y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(7x - 20y) = 0 \\ 7x - 20y = 10 \end{cases}$$

es incompatible, pues no se puede verificar que $7x - 20y$ sea a la vez igual a 0 y a 10.

Así pues, los *Sistemas Lineales* se pueden clasificar según las soluciones que tengan en:



INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE UN SISTEMA

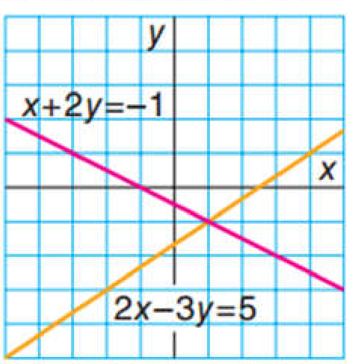
Como ya hemos indicado, la ecuación lineal con dos incógnitas es la expresión analítica de una recta. Por tanto, un *Sistema De Dos Ecuaciones* se puede interpretar como un par de rectas, cuya posición en el plano será el resultado del tipo de sistema de que se trate.

Si en el sistema $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ llamamos r y s a las rectas representadas por la primera y segunda ecuación, $r \equiv ax + by = c$ y $s \equiv a'x + b'y = c'$, entonces:

1. Si r y s se cortan en el punto $P = (x_0, y_0)$ el sistema será **compatible determinado** y su solución es: $x = x_0$ e $y = y_0$.
2. Si r y s son rectas paralelas el sistema es **incompatible.**
3. Si r y s son dos rectas que se superponen, todos los puntos serán comunes y el sistema tiene un conjunto infinito de soluciones. Es, pues, **indeterminado.**

Los pares de rectas asociados a los siguientes sistemas se representan más abajo.

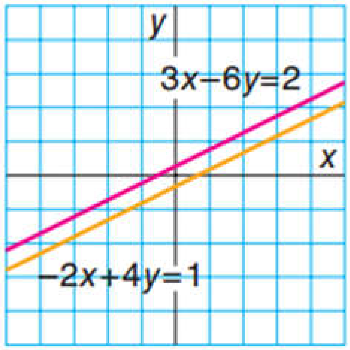
a)



$$\begin{cases} x + 2y = -1 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$$

rectas que se cortan

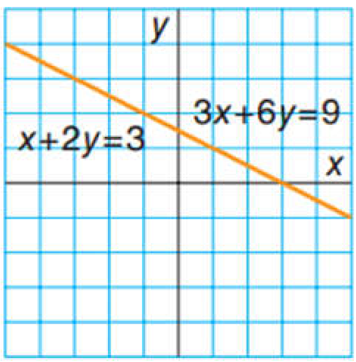
b)



$$\begin{cases} -2x+4y=1 \\ 3x-6y=2 \end{cases}$$

rectas paralelas

c)



$$\begin{cases} x+2y=3 \\ 3x+6y=9 \end{cases}$$

rectas coincidentes

EJERCICIO 05: escoge la solución que se adecúe o sea la solución correspondiente a cada uno de los siguientes casos de sistemas de ecuaciones.

1. $\begin{cases} 3x+y=7 \\ x+y=1 \end{cases}$

$x = 3, y = 0$ $x = 3, y = 2$ $x = 3, y = -2$

2. $\begin{cases} x+y=20 \\ 2x-2y=8 \end{cases}$

$x = 12, y = 4$ $x = 12, y = 8$ $x = 6, y = 8$

3. $\begin{cases} 3x+y=-1 \\ -3x+2y=7 \end{cases}$

$x = -1, y = 2$ $x = 2, y = -1$ ***Las dos opciones anteriores son correctas.***

4. $\begin{cases} 3x+3y=6 \\ x-2y=4 \end{cases}$

$x = \frac{8}{3}, y = -\frac{2}{3}$ $x = 8\ y = -2$ ***Ninguna de las opciones anteriores es solución del sistema dado.***

EJERCICIO 06: asocia a cada uno de estos problemas el sistema de ecuaciones que usarías para resolverlo.

5.- Pablo compra en una tienda de segunda mano un videojuego de FIFA y dos de boxeo por Q 55.00. Andrea Michelle compra en esa misma tienda tres juegos de Princesas y uno de Zelda por Q 90.00

$$\begin{cases} x + 2y = 55 \\ 3x + y = 90 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y = 90 \\ 3x + y = 55 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2x = 55 \\ 3y + y = 90 \end{cases}$$

6.- María y Alex son hermanos y entre los dos suman 19 años. Sabiendo que la edad de María menos uno es igual a la mitad de la edad de Alex.

$$\begin{cases} x + y = 19 \\ \dfrac{x}{2} - 1 = y \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 19 \\ x + 1 = \dfrac{y}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 19 \\ x - 1 = \dfrac{y}{2} \end{cases}$$

EJERCICIO 07: encuentra las incógnitas que le den valor de verdad al siguiente sistema de ecuaciones de dos incógnitas.

$$\textbf{7.-} \begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases} \qquad \textbf{8.-} \begin{cases} -5x + 5y = -30 \\ -6x - 5y = 19 \end{cases} \qquad \textbf{9.-} \begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 3y = 4 \end{cases} \qquad \textbf{10.-} \begin{cases} -x + 2y = 15 \\ 2x - y = 10 \end{cases}$$

SOLUCIÓN DE ECUACIONES LINEALES POR MÉTODO DE DETERMINANTES

DETERMINANTE

Es un arreglo rectangular de filas y columnas, en donde los elementos son los valores de los coeficientes de las ecuaciones que forman el sistema.

El tamaño del determinante lo da el número de filas y columnas. Hay determinantes 2 x 2; 3 x 3; 4 x 4 y así consecutivamente. Las filas son las horizontales y las columnas son las verticales.

$$\begin{array}{r l} \text{Columna} \downarrow & \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}_{2 \times 2} \\ \text{Fila} \rightarrow & \end{array}$$

Resolver un determinante, es hallar el valor del mismo, según el tamaño, la forma de resolución es muy particular.

Determinante de 2 x 2: para resolver un determinante de 2 x 2, la solución es como se indica a continuación.

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \Rightarrow D = x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1$$

Donde D es el valor del determinante.

Para sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas, se emplea determinantes de 2 x 2. Para ello Kramer propuso una técnica para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, utilizando determinantes. A este sistema se le llama Regla de Kramer.

Dado un Sistema de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas encontrar su solución.

$$a_1 \; x_1 + \; b_1 \; y_1 = c_1$$
$$a_2 \; x_2 + \; b_2 \; y_2 = c$$

REGLA DE KRAMER

Como se vio anteriormente la solución de un sistema de dos Ecuaciones con dos Incógnitas está dada por:

$$x = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{a_1 b_2 - b_1 a_2} \qquad \text{y} \qquad y = \frac{a_1 c_2 - c_1 a_2}{a_1 b_2 - b_1 a_2}$$

Solución que puede ser escrita con relación de Determinantes como:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Y en forma simplificada:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta s} \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta s}$$

en donde:

$\Delta_s = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ es el delta del Sistema y está formado por los Coeficientes,

$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$ es el delta "x" y esta formado por las Constantes (en la columna de "x") y por los Coeficientes de "y" y

$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$ que es el delta "y" y está formado por los Coeficientes de "x" y por las Constantes (en la columna de "y")

Por ejemplo: se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$3x - 2y = 5$$
$$5x - y = 6$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{(-2)(6)-(-1)(5)}{(3)(-1)-(5)(-2)} = \frac{-12+5}{-3+10} = \frac{-7}{7} = -1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{(3)(6)-(5)(5)}{(3)(-1)-(5)(-1)} = \frac{18-25}{-3+10} = \frac{-7}{7} = -1$$

La solución del sistema es:

$$x = -1$$
$$y = -1$$

EJERCICIO 08: encontrar la solución a los siguientes sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas, empleando la Regla de Kramer.

1. $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ x + 5y = 3 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ -4x - 8y = 7 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} -4x - 5y = -9 \\ 6x + 9y = 10 \end{cases}$ **4.** $\begin{cases} x - 4y = -10 \\ 4x - 7y = 7 \end{cases}$

5. $\begin{cases} -3x + 6y = -7 \\ -5x - 2y = -7 \end{cases}$ **6.** $\begin{cases} -6x + 10y = 7 \\ 10x + 2y = 6 \end{cases}$ **7.** $\begin{cases} 10x + 9y = 8 \\ -x - 4y = 9 \end{cases}$ **8.** $\begin{cases} -10x + 5y = 6 \\ 2x + y = -10 \end{cases}$

9. $\begin{cases} -9x - 6y = 10 \\ 3x + 7y = 4 \end{cases}$ **10.** $\begin{cases} -x - 2y = 8 \\ -4x - 3y = -3 \end{cases}$

SISTEMAS DE TRES ECUACIONES DE PRIMERO GRADO CON TRES INCÓGNITAS

SOLUCIÓN POR MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

En este caso se despeja una incógnita (alguna, si hay, que tenga coeficiente unidad) de cualquiera de las ecuaciones; sustituimos el valor de esa incógnita en las otras dos ecuaciones y reordenamos términos, quedando un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Observamos el sistema por si alguna ecuación tuviera despejada una de sus incógnitas; si ocurre nos han hecho parte del trabajo y la reemplazamos en las otras dos, formando un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas en la que ya no existe la incógnita despejada.

Si al reemplazar en las otras dos ecuaciones no existe dicha incógnita, tomamos la ecuación tal como está.

Por ejemplo: Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 11 \\ x + y - 2z = -2 \\ -x - 2y + 5z = 5 \end{cases}$$

Despejamos la variable "x" de la 2ª:

Tenemos la ecuación siguiente:

$$x = 2z - y - 2$$

Sustituyendo el valor de la variable "x" en las otras dos, resulta un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$\begin{cases} 2(2z - y - 2) - 3y + 4z = 11 \\ -(2z - y - 2) - 2y + 5z = 5 \end{cases}$$

Quitando paréntesis y ordenando se obtiene:

$$\begin{cases} -5y + 8z = 15 \\ -y + 3z = 3 \end{cases}$$

Entonces:

$$y = 3z - 3$$

Entrando con el valor de la variable "y" en la 1ª ecuación:

$$-5(3z - 3) + 8z = 15 \Rightarrow -15z + 15 + 8z = 15 \Rightarrow z = 0$$

Sustituyendo ahora (con z = 0) en:

$$y = 3z - 3 \Rightarrow y = 3 \cdot 0 - 3 = -3$$

Puesto que:

$$x = 2z - y - 2 \Rightarrow x = 2 \cdot 0 - (-3) - 2 = 1$$

Solución del sistema:

$$x = 1;\ y = -3;\ z = 0$$

Casos Particulares: en ciertas ocasiones, durante la resolución de un sistema, puedes encontrarte con ciertos inconvenientes, se detiene el ejercicio y no sabemos resolver:

- Si encontramos una ecuación con **0x = 0**, **0y = 0**, **0z = 0**, en general el sistema es indeterminado (tiene infinitas soluciones).

- Si encontramos una ecuación con **0x = a**, a ≠0; **0y = b**, b ≠0; **0z = c,** c ≠0, (por ejemplo **0x = 7**) el sistema es incompatible (NO hay solución).

SOLUCIÓN POR MÉTODO DE REDUCCIÓN

Tomamos dos ecuaciones cualesquiera y eliminamos una incógnita, resultando una ecuación con dos incógnitas; ahora tomamos la que queda con una cualquiera de las dos tomadas anteriormente y eliminamos la misma incógnita que en el caso anterior, resultando otra ecuación con las dos incógnitas anteriores. De esta forma hemos reducidos el sistema a dos ecuaciones con dos incógnitas.

Se deben seguir las pautas indicadas, pues en caso contrario llegaremos a una igualdad: CERO = CERO. Se entrará en un problema y no encontraremos solución en el sistema.

Ejemplo: Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ x + y - z = 6 \\ -x + 2y + 2z = -5 \end{cases}$$

Tomamos las dos primeras ecuaciones y eliminamos la incógnita o variable "x": como en la 1ª ecuación el coeficiente de la incógnita o variable "x" es 2 y en la 2ª es 1, multiplicamos ésta por −2:

$$\begin{cases} 2x-3y+z=1 \\ -2x-2y+2z=-12 \end{cases} \quad \text{sumándolas:} \quad \begin{array}{r} 2x-3y+z=1 \\ -2x-2y+2z=-12 \\ \hline -5y+3z=-11 \end{array}$$

Tomamos la ecuación que queda (la 3ª) con una cualquiera de las dos tomadas anteriormente (elegimos la 2ª):

$$\begin{cases} -x+2y+2z=-5 \\ x+y-z=6 \end{cases} \quad \text{sumando} \Rightarrow \quad \begin{array}{r} -x+2y+2z=-5 \\ x+y-z=6 \\ \hline 3y+z=1 \end{array}$$

Así conseguimos el sistema equivalente (segunda ecuación del sistema inicial más estas dos ecuaciones donde se ha reducido la "x"):

$$\begin{cases} x+y-z=6 \\ -5y+3z=-11 \\ 3y+z=1 \end{cases}$$

Elegimos estas dos últimas ecuaciones, y de nuevo por reducción, eliminamos la **z**; como en la 1ª ecuación el coeficiente de la **z** es 3 y en la 2ª es 1, multiplicamos ésta por − 3:

$$\begin{cases} -5y+3z=-11 \\ -9y-3z=-3 \end{cases} \quad \text{sumando obtenemos:} \quad \begin{array}{r} -5y+3z=-11 \\ -9y-3z=-3 \\ \hline -14y \quad =-14 \end{array}$$

Queda entonces, una ecuación con una incógnita, que despejando tenemos:

$$y=\frac{-14}{(-14)}=1$$

Sustituyendo este valor de **y** en la 2ª ecuación resulta:

$$3\cdot 1+z=1 \Rightarrow 3+z=1$$

Pasando el 3 del primer miembro al 2º con signo "–" queda:

$$z=1-3=-2$$

Con estos valores de:

$$y=1 \qquad z=-2$$

Sustituimos en la 2ª ecuación del sistema inicial y se obtiene:

$$x+1-(-2)=6 \Rightarrow x+1+2=6 \Rightarrow x+3=6 \Rightarrow x=3$$

Solución:

$$x=3 \qquad y=1 \qquad z=-2$$

EJERCICIO 09: resolver los siguientes sistemas de ecuaciones empleando el método que se adecúe según tu criterio para encontrarle solución.

1 $\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2y + 3z = 15 \\ 3x + y = 12 \end{cases}$

2 $\begin{cases} x + y - 2z = 9 \\ 2x - y + 4z = 4 \\ 2x - y + 6z = -1 \end{cases}$

3 $\begin{cases} x + 2y - 3z = -16 \\ 3x + y - 2z = -10 \\ 2x - 3y + z = -4 \end{cases}$

4 $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + z = 4 \\ y + z = 5 \end{cases}$

5 $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + 5z = 11 \\ x - 5y + 6z = 29 \end{cases}$