CBS

Colegio Bautista Shalom

Matemática 2
Segundo Básico
Segundo Bimestre

Contenido

INFORMACIÓN (INCLUÍDA EN ESTE DOCUMENTO EDUCATIVO EN SU *VERSIÓN ANTERIOR*) TOMADA DE:

1. *https://es.khanacademy.org/math/geometry/hs-geo-trig/hs-geo-trig-ratios-intro/a/finding-trig-ratios-in-right-triangles*
2. *http://ieszaframagon.com/matematicas/4_eso/trigonometria/web/problemas.htm*
3. *https://www.spanishged365.com/185/triangulos-congruentes*
4. *matematica1.com/congruencia-de-triangulos-ejercicios-y-problemas-resueltos-en-pdf-y-videos/*
5. *http://www.profesorenlinea.cl/geometria/Plano_Cartesiano.html*
6. *http://www.profesorenlinea.cl/matematica/Relaciones_y_funciones.html*
7. *http://cmap.ihmc.us/docs/QueEsProposicion.html*
8. *http://sipan.inictel.gob.pe/internet/av/iconjuntos.htm*
9. *http://introduccionalpensmientologico.blogspot.com/2009/09/conectivos-logicos.html*
10. *https://www.ecured.cu/Funci%C3%B3n_Inversa*
11. *http://matematicatuya.com/FUNCIONES/10funcioninversa.html*
12. *http://www.vitutor.com/fun/2/i_e.html*
13. *http://www.vitutor.com/fun/2/i_e.html*
14. *http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/EDAD_3eso_funciones_lineales/3eso_quincena10.pdf*
15. *http://matefacil01.blogspot.com/2011/05/funcion-lineal.html*
16. *http://www.x.edu.uy/lineal.htm*

INFORMACIÓN (INCLUÍDA EN ESTA *NUEVA VERSIÓN* DE ESTE DOCUMENTO EDUCATIVO) TOMADA DE LOS SIGUIENTES SITIOS WEB:

1. *https://www.spanishged365.com/teorema-de-pitagoras/*
2. *https://www.montereyinstitute.org/courses/DevelopmentalMath/TEXTGROUP-1-8_RESOURCE/U07_L1_T4_text_final_es.html*
3. *https://www.matesfacil.com/pitagoras/problemas-resueltos-pitagoras.html*
4. *https://sites.google.com/site/portafolioprecalculoyairacruz/u-cuarto-parcial/5-triangulos*

NOTA: conforme vayas avanzando en tu aprendizaje debes realizar uno de los ejercicios. Copia cada ejercicio en hojas en blanco bond. Desarrolla a lápiz tus procedimientos y escribe la respuesta final con lapicero negro. Sigue las instrucciones de tu catedrático(a) para entregar.

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

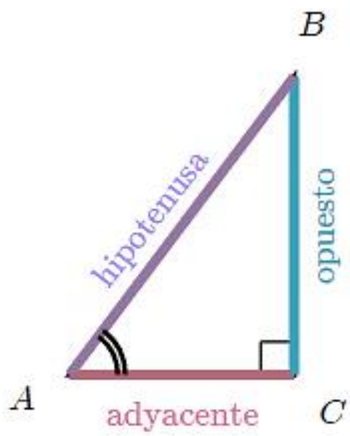
Las razones de los lados de un triángulo rectángulo se llaman razones trigonométricas.

Tres razones trigonométricas comunes son:

1. Seno (sin).
2. Coseno (cos).
3. Tangente (tan).

Estas se definen para el ángulo agudo A como sigue:

En estas definiciones los términos: opuesto, adyacente e hipotenusa se refieren a las *longitudes* de esos lados.



$$\sin(A) = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos(A) = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\tan(A) = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}}$$

SOH-CAH-TOA

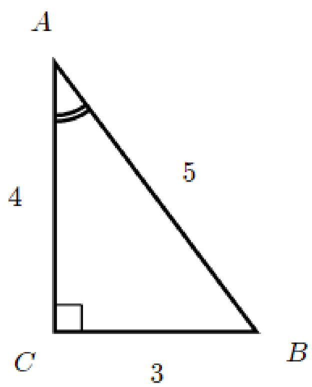
La palabra **sohcahtoa** nos ayuda a recordar las definiciones de seno, coseno y tangente. He aquí como funciona esto:

Por ejemplo, si queremos recordar la definición de *seno*, nos referimos a SOH pues *seno* empieza con la letra S.

¡La O y la H nos ayudan a recordar que seno es opuesto entre hipotenusa!

Acrónimo	Descripción verbal	Definición matemática
SOH	Seno es Opuesto entre Hipotenusa	$\sin(A) = \frac{\text{Opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$
CAH	Coseno es Adyacente entre Hipotenusa	$\cos(A) = \frac{\text{Adyacente}}{\text{Hipotenusa}}$
TOA	Tangente es Opuesto entre Adyacente	$\tan(A) = \frac{\text{Opuesto}}{\text{Adyacente}}$

Ejemplo:

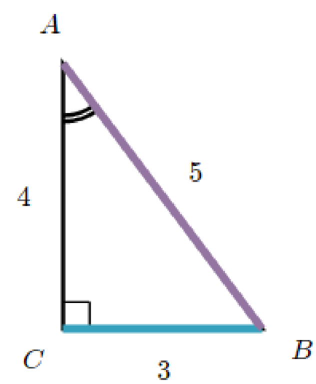


Supongamos que queremos determinar $\sin(A)$ en $\triangle ABC$ dado.

Seno se define como la razón entre opuesto e hipotenusa (SOH).

Por lo tanto:

$$\sin(A) = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{5}$$



He aquí otro ejemplo en el que examinamos un problema similar. Escanea el Código QR con tu Tablet o Smartphone e ingresa al vídeo tutorial, en donde aprenderás aún más del tema que estamos estudiando.

EJERCICIO 01. Reescribe en hojas los ejercicios y resuélvelos, según lo que se te pida (en cada uno de ellos).

PROBLEMA 01. Determina el Cos(F), Sen(F) y Tg(F) en el siguiente triángulo rectángulo.

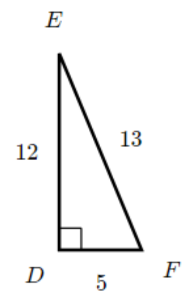
Triángulo 1:

$\triangle DEF$

Cos(F)____________

Sen(F)____________

Tg(F)____________



PROBLEMA 02. Determina el Cos(G), Sen(G) y Tg(G) en el siguiente triángulo rectángulo.

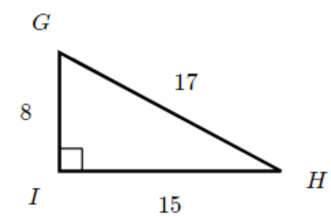
Triángulo 2:

$\triangle GHI$

Cos(G)____________

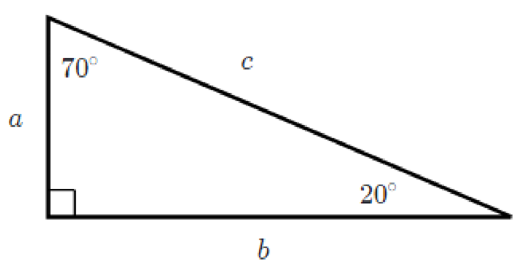
Sen(G)____________

Tg(G)____________



EJERCICIO 02 (PARA APRENDIZAJE).

¿En el siguiente triángulo, ¿cuál de los siguientes es igual a $\frac{a}{c}$?



Elige todas las respuestas adecuadas:

- ◯ $\cos(20^\circ)$
- ◯ $\sin(20^\circ)$
- ◯ $\tan(20^\circ)$
- ◯ $\cos(70^\circ)$
- ◯ $\sin(70^\circ)$
- ◯ $\tan(70^\circ)$

Explicación...

Con respecto al ángulo de 20°, el lado α es el opuesto, y el lado c es la hipotenusa. La razón trigonométrica que incluye estos dos lados es la razón del seno (SOH), así que:

$$\sin(20^\circ) = \frac{a}{c}$$

Con respecto al ángulo de 70°, el lado α es el adyacente, y el lado c es la hipotenusa. La razón trigonométrica que incluye estos dos lados es la razón del coseno (CAH), así que:

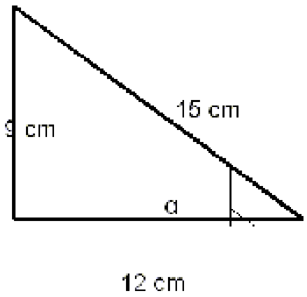
$$\cos(70^\circ) = \frac{a}{c}$$

Los siguientes son iguales a $\frac{a}{c}$:

- sin(20°)
- cos(70°)

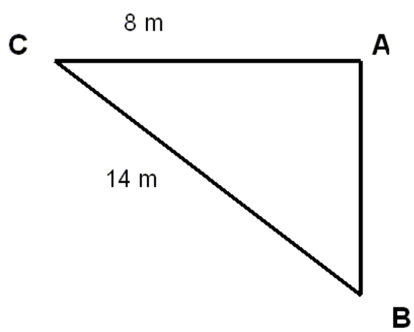
EJERCICIO 03. Realiza lo que se te pide a continuación.

Problema 01. Calcula las razones trigonométricas del ángulo α:



Como ves, los tres lados del triángulo son conocidos, así que para calcular las razones trigonométricas sólo tenemos que aplicar las fórmulas y sustituir. Para el ángulo α el cateo opuesto es 9, el contiguo 12 y la hipotenusa 15.

Problema 02. Calcula las razones trigonométricas del ángulo C del siguiente triángulo.



Ahora, en caso no tenemos los tres lados, falta uno de los catetos y para calcularlo vamos a utilizar el Teorema de Pitágoras.

Lo primero ponerle nombre a los lados. Vamos a llamarle con letras minúsculas a los lados que están enfrente del ángulo con la correspondiente letra mayúscula; es decir a = 14 m, b = 8 m y c es el lado que queremos calcular.

Aplicando el Teorema de Pitágoras tenemos:

… y aplicando las fórmulas tenemos:

$a^2 = b^2 + c^2$

$= \quad +$

$= \quad +$

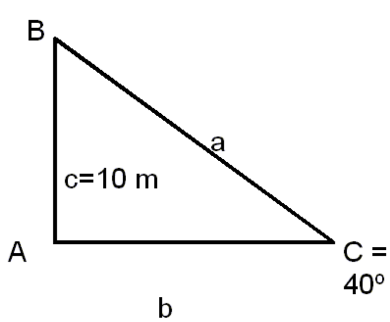
$=$

$=$

$=$

Luego c =

Problema 03. De un triángulo rectángulo se sabe que uno de sus ángulos agudos es 40º y que el cateto opuesto a éste mide 10m. Calcula el ángulo y los lados que faltan.



Lo primero es hacer un dibujo que nos aclare la situación y ponerle nombre a los lados y ángulos.

Esta sería nuestra situación.

Para empezar los más fácil es sacar el ángulo que falta, y aplicando que la suma de los tres es 180, el ángulo B vale 50º.

Vamos a calcular ahora por ejemplo el lado "b". Si me fijo en el ángulo C, el lado que sé es el cateto opuesto y el que pretendo calcular es el contiguo. Como la razón trigonométrica en la que intervienen estos es la tangente, voy a calcularla con la calculadora y despejar a partir de allí…

Por tanto ya tenemos el lado "b". Para calcular el lado "a" podríamos aplicar Pitágoras o sacarlo por alguna razón. Vamos a seguir este camino que será más corto.

Por ejemplo voy a fijarme en el lado "c" y el ángulo "C", aunque ya podría utilizar cualquiera de los datos que tengo. Para el ángulo "C" sé cateto opuesto y quiero hipotenusa; así que habrá que utilizar el seno:

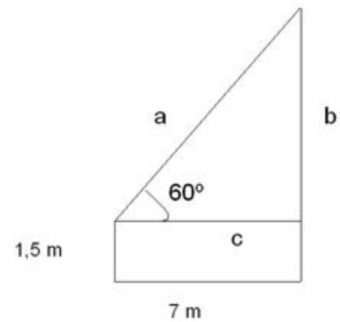
Problema 04. Determina los ángulos del cateto pendiente del **Problema 02.** Obviamente ya sabemos que el ángulo A es el ángulo recto y por tanto A = 90º.

Para calcular los otros dos vamos a hacerlo con las razones trigonométricas y con la ayuda de la calculadora.

Si queremos calcular el ángulo C con los datos que parto, lo primero es identificar los lados que conozco respecto al ángulo C, que en este caso son ***cateto contiguo e hipotenusa*** y pienso en qué razón trigonométrica intervienen esos lados. La respuesta es el coseno, así que calculo ***cos C***

Para calcular B puedo hacer lo mismo, pensar qué razón puedo calcular, o como ya tengo dos ángulos, sacarlo de que la suma de los ángulos de cualquier triángulo es 180º *(A + B + C = 180).*

Problema 05. Calcula la altura de la torre si nuestro personaje está a 7 m de la base de la torre, el ángulo con el que está observando la cúspide es de 60º y sostiene el artilugio a una altura de 1,5 m.



Para comenzar, vamos a hacer un dibujo que aclare un poco la situación poniendo los datos que conocemos.

Si nos fijamos en el triángulo, el lado c mide 7 m y una vez que tengamos calculado el lado b, para calcular la altura de la torre sólo tendremos que sumarle los 1,5 m. Así pues, vamos a calcular el lado b.

Para el ángulo 60º, el lado que conozco es el cateto contiguo y el que quiero calcular es el cateto opuesto, así pues planteo la tangente de 60º.

Por tanto la altura de la torre es 12,11 m + 1,5 m = 13, 61 m.

Problema 06. El seno de cierto ángulo ɑ del segundo cuadrante vale 0,45. Calcula el coseno y la tangente.

Para resolver este ejercicio tenemos que recurrir a las relaciones trigonométricas. De la primera sacaremos el valor del coseno y una vez que lo tengamos sacaremos la tangente:

Sacamos el valor del coseno despejándolo de la fórmula:

Para calcular el valor de la tangente, aplicamos la segunda fórmula:

Problema 07. Sabiendo que cos 42º = 0,74. Calcula: sen 222º, tg 138º, cos 48º, sen 318º y sen 132º.

Sen 222º
(Para calcular el sen 42º seguimos el mismo procedimiento que en el ejercicio 6).

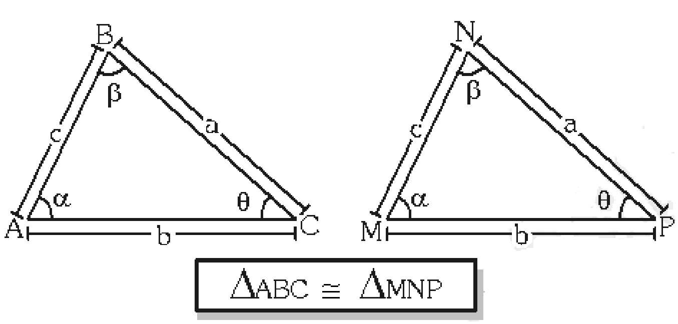
Tg 138º
(Tg 42º lo calculamos igual que en el ejercicio 6)

Cos 48º

Sen 318º

Sen132º

CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS



Dos triángulos son congruentes; si las longitudes de sus lados son iguales y las medias de sus ángulos intermedios son iguales respectivamente.

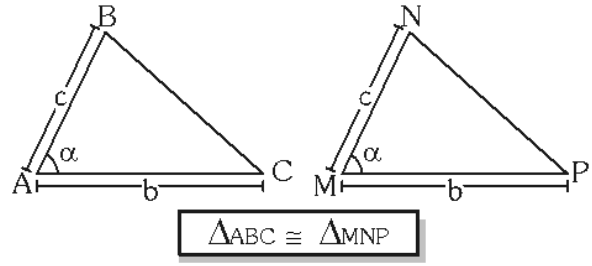
TEOREMAS DE CONGRUENCIA

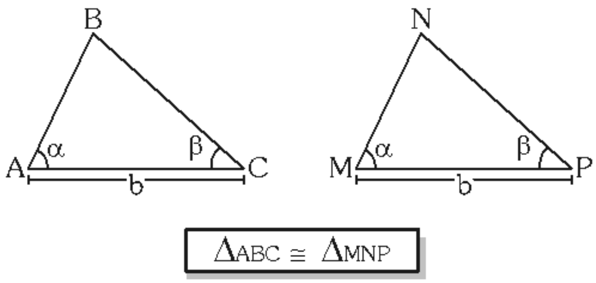
Para que dos triángulos sean congruentes, se precisan tres condiciones, y que entre los elementos congruentes haya por lo menos un lado.

Los teoremas de congruencia son:

PRIMER TEOREMA (LADO – ÁNGULO – LADO)

Si dos triángulos tienen un ángulo y los lados que lo conforman respectivamente congruentes, entonces dichos triángulos son congruentes.



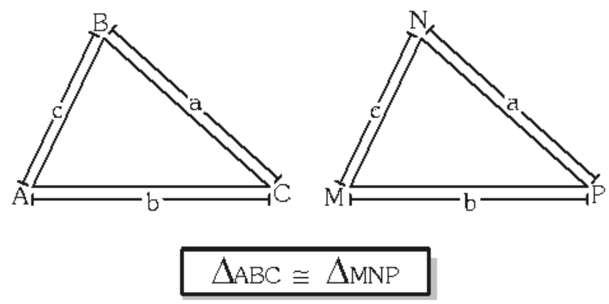


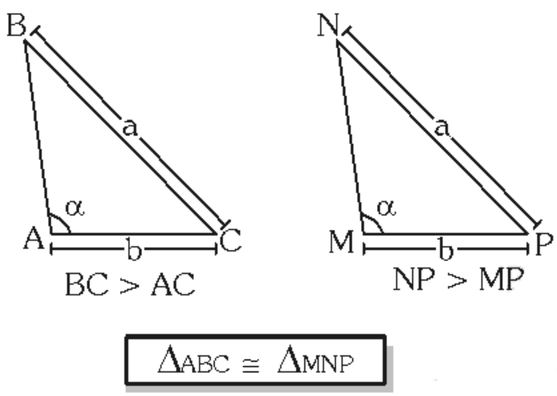
SEGUNDO TEOREMA (ÁNGULO – LADO – ÁNGULO)

Dos triángulos son congruentes si tienen un lado y los ángulos adyacentes a él respectivamente congruentes.

TERCER TEOREMA (LADO – LADO – LADO)

Dos triángulos son congruentes si sus tres lados son respectivamente congruentes.





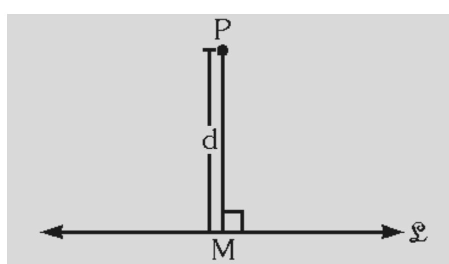
CUARTO TEOREMA (ÁNGULO – LADO – LADO MAYOR)

Dos triángulos son congruentes si tienen dos lados y el ángulo opuesto al mayor de los lados congruentes respectivamente congruentes.

Existen infinitas distancias de un punto a una recta, pero la mínima distancia es la longitud del segmento perpendicular del punto a la recta dada. En adelante cuando hable de la distancia de un punto a una recta, entenderemos que se refiere a la mínima distancia.

Sea "P" punto exterior a la recta "L" la longitud de la perpendicular PM a la recta:

Sea "P" punto exterior a la recta "$\mathcal{L}$" la longitud de la perpendicular $\overline{PM}$ a la recta "$\mathcal{L}$" es la distancia del punto "P" a dicha recta
"d": distancia de "P" a "$\mathcal{L}$" es la distancia del punto "P" a dicha recta.

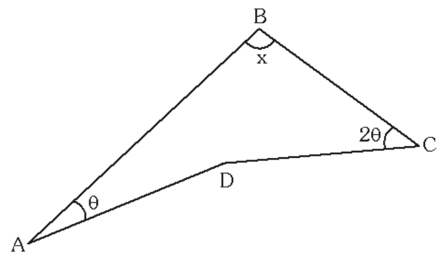


"d": distancia de "P" a "$\mathcal{L}$"

Observa el siguiente ejemplo:

En la figura demostrar que:

$x = 120° - \theta$



En el ΔBCD: se traza $\overline{CM} \perp BD$

$$\Rightarrow BM = MD = a$$

Trazamos: $\overline{DN} \perp \overline{AB}$

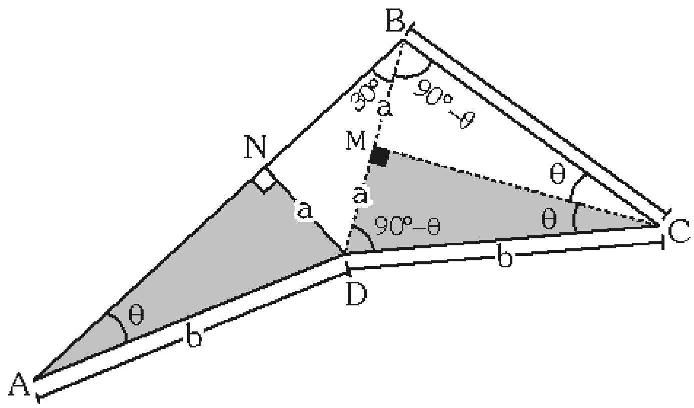
$$\Rightarrow \triangle AND \cong \triangle DMC$$

$\triangle DMB$: $(30^\circ - 60^\circ) \Rightarrow BM\ m\measuredangle NBD = 30^\circ$

Luego: $m\measuredangle ABC = 30^\circ + 90^\circ - \theta$

$$\therefore \boxed{x = 120^\circ - \theta}$$

Demostración:



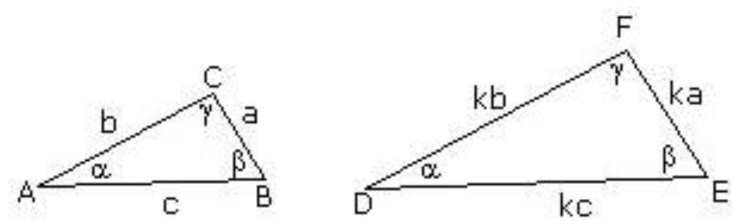
TRIÁNGULOS SEMEJANTES

Cuando dos triángulos tienen la misma forma, pero no necesariamente el mismo tamaño, se denominan triángulos semejantes. En el siguiente recurso podrás repasar la materia relacionada con los triángulos semejantes.

CONCEPTO DE SEMEJANZA

Dos triángulos congruentes tienen la misma forma y el mismo tamaño. Cuando dos triángulos tienen la misma forma, pero no necesariamente el mismo tamaño, se denominan triángulos *semejantes*.

Cuando dos triángulos son semejantes, los ángulos correspondientes son congruentes y los lados correspondientes son proporcionales.



Es decir:

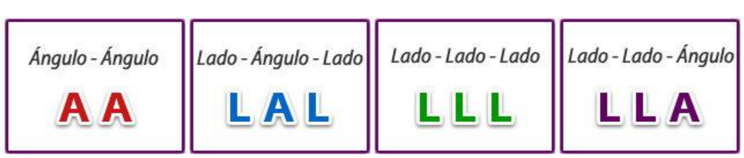
Donde *k* es la razón de semejanza.

Observación: Si *k* = 1, entonces los triángulos son **congruentes**.

Al igual que en la congruencia, aquí se presentan los denominados *criterios de semejanza*, que constituyen las condiciones mínimas necesarias para establecer que dos triángulos son semejantes.

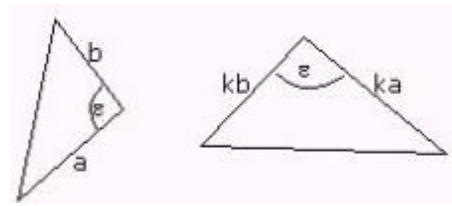
CRITERIOS DE SEMEJANZA

Esos **criterios o casos** son:

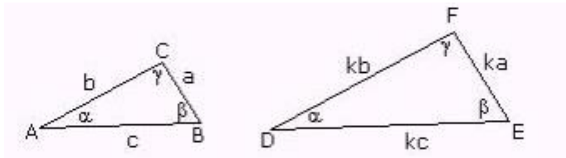


TEOREMA DE LA SEMEJANZA

Si dos triángulos son semejantes, con razón de semejanza *k*, entonces sus perímetros están en la razón *k* y sus áreas están en la razón k^2.



En la figura:

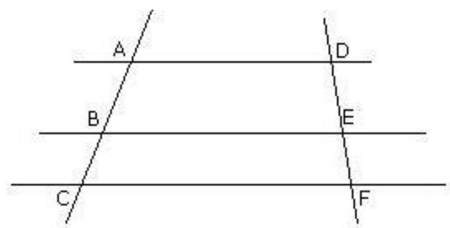


Si $\Delta\ ABC \sim \Delta\ DEF$ con razón de semejanza *k*, entonces se cumple que:

$$\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{AC}{DF}=k \quad ; \quad \frac{\text{perímetro}\ \Delta\ ABC}{\text{perímetro}\ \Delta\ DEF}=k \quad \text{y} \quad \frac{\text{área}\ \Delta\ ABC}{\text{área}\ \Delta\ DEF}=k^2$$

TEOREMA DE THALES

Si tres o más rectas paralelas son cortadas por dos transversales o secantes, los segmentos determinados en una de las secantes son proporcionales a los segmentos determinados en la otra secante.



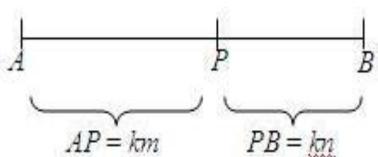
En la figura, si $\overline{AD} // \overline{BE} // \overline{CF}$, entonces AB : BC = DE : EF, o bien AB : AC = DE : DF, o cualquier otra permutación de estas proporciones. Además el recíproco de este teorema también es válido, es decir, si los segmentos determinados en las secantes son proporcionales, entonces las rectas son paralelas.

Ejemplo. En la figura anterior, si se cumple que: AB : BC = 5 : 4 y DF = 27 cm, entonces ¿cuánto mide EF?

Solución: Como AB : BC = 5 : 4, entonces AC : BC = 9 : 4, pero AC : BC = DF : EF, por lo tanto 9 : 4= 27 : *x* , con lo que se obtiene *x* = 12.

DIVISIÓN INTERIOR DE UN TRAZO

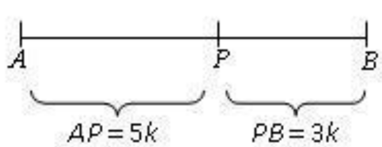
Un trazo $\overline{AB}$ queda dividido interiormente por un punto *P* (perteneciente al trazo $\overline{AB}$) en una razón dada *m : n*, si se cumple la proporción $AP : PB = m : n$.



$k =$ constante de proporcionalidad

Ejemplo. Un trazo $\overline{AB}$ de 40 cm de longitud es dividido interiormente por un punto P en razón de 5 : 3. ¿A cuántos centímetros del extremo B se sitúa el punto P?

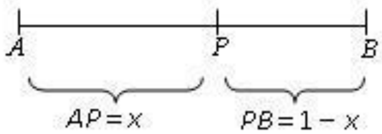
Solución. En este ejemplo, AB = 40 cm, m : n = 5 : 3, PB = x y k = constante de proporcionalidad. Entonces,



$$\begin{aligned} AB &= 40\ \text{cm} \\ AP + PB &= 40\ \text{cm} \\ \text{luego,}\quad 5k + 3k &= 40\ \text{cm} \\ 8k &= 40\ \text{cm} \\ k &= \frac{40}{8} = 5\ \text{cm} \\ \text{Por lo tanto,}\quad PB &= 3 \cdot 5 = 15\ \text{cm} \end{aligned}$$

SECCIÓN ÁUREA

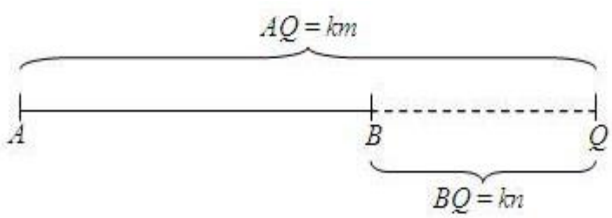
Dado un trazo $\overline{AB}$ y un punto P entre A y B tal que $AP > PB$, entonces $\overline{AB}$ queda dividido en sección áurea por el punto P sí $AB : AP = AP : PB$, es decir, $\overline{AP}$ es media proporcional geométrica entre $\overline{AB}$ y $\overline{PB}$.
Ejemplo: Si un trazo $\overline{AB}$ mide 1 m y el punto P interior lo divide en sección áurea, entonces ¿cuánto mide $\overline{AP}$?
Solución. Como AB = 1 m, AP = x, $PB = 1 - x$ y $AB : AP = AP : PB$, entonces



$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$$
$$(1-x) = x^2$$
$$x^2 + x - 1 = 0$$
$$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0,618033988\ldots$$

DIVISIÓN EXTERIOR DE UN TRAZO

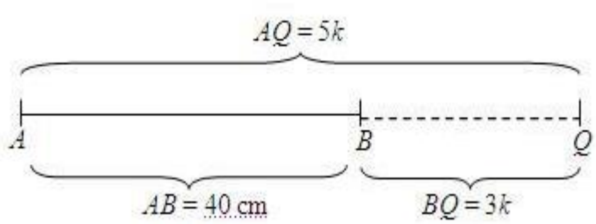
Dados un trazo $\overline{AB}$ y un punto Q situado sobre la prolongación de $\overline{AB}$, entonces Q divide exteriormente a $\overline{AB}$ en una razón dada m : n si $AQ : BQ = m : n$ (m > n).



k = constante de proporcionalidad

Ejemplo: Un trazo $\overline{AB}$ de 40 cm de longitud es dividido exteriormente por un punto Q en razón de 5 : 3. ¿A qué distancia de B se sitúa el punto Q?

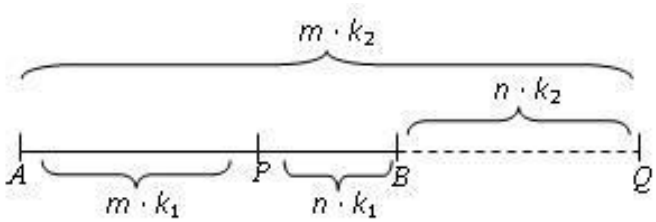
Solución. En este ejemplo, AB = 40 cm, m : n = 5 : 3, BQ = x y k = constante de proporcionalidad. Entonces:



$$AQ - BQ = AB$$
$$5k - 3k = 40 \text{ cm}$$
$$2k = 40 \text{ cm}$$
$$k = \frac{40}{2} = 20 \text{ cm}$$
$$\text{Por lo tanto, } BQ = 3 \cdot 20 = 60 \text{ cm}$$

DIVISIÓN ARMÓNICA DE UN TRAZO

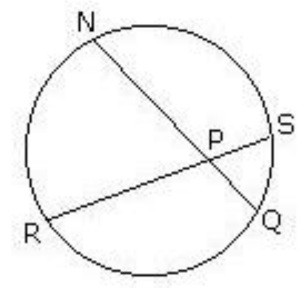
Un trazo $\overline{AB}$ queda dividido armónicamente cuando está dividido interior y exteriormente en una misma razón dada. Es decir, el trazo $\overline{AB}$ de la figura está dividido armónicamente en razón de m : n si AP : PB = m : n = AQ : BQ.



k_1 y k_2 son constantes de proporcionalidad

SEGMENTOS PROPORCIONALES EN EL CÍRCULO

Si dos cuerdas se intersectan en el interior de un círculo, el producto de los segmentos determinados en una cuerda es igual al producto de los segmentos determinados en la otra cuerda.

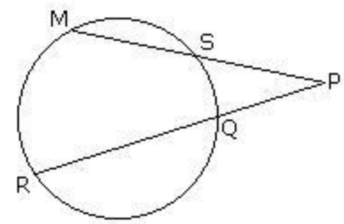


TEOREMA DE LAS CUERDAS

Si dos cuerdas se intersectan en el interior de un círculo, el producto de los segmentos determinados en una cuerda es igual al producto de los segmentos determinados en la otra cuerda.

En esta figura, NP • PQ = PS • PR

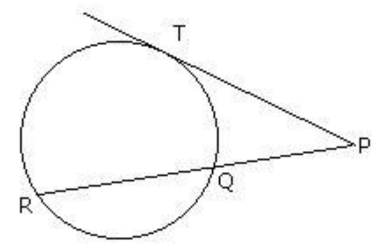
TEOREMA DE LAS SECANTES



Si desde un punto exterior a un círculo se trazan dos rectas secantes, entonces el producto entre el segmento exterior con el segmento total determinados en una de las secantes será igual al producto de los segmentos correspondientes en la otra secante.

En esta figura, PS • PM = PQ • PR

TEOREMA DE LA SECANTE Y LA TANGENTE

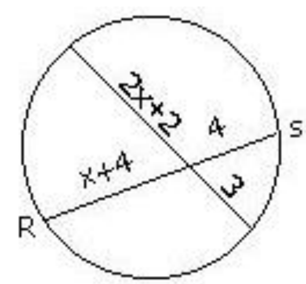


Si desde un punto exterior a un círculo se traza una recta secante y una tangente, entonces el producto entre el segmento exterior de la secante con el segmento total será igual al cuadrado del segmento tangente.

En esta figura, PT2 = PQ • PR

Ejemplo:

Según la información dada en la figura, ¿cuánto mide RS?

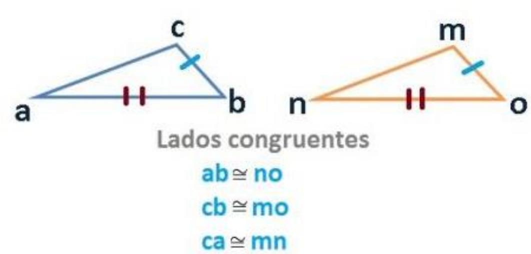


Solución: Por el teorema de las cuerdas, tenemos que:

$4(x+4) = 3(2x+2)$
$4x+16 = 6x + 6$
$2x = 10$
$x = 5$

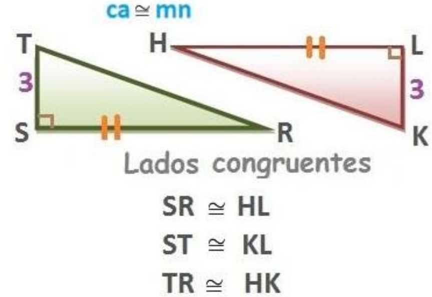
Pero como RS = x+8 , reemplazando el valor de x obtenemos RS = 13

TRIÁNGULOS COGRUENTES



Para que un triángulo sea congruente debe tener las mismas medidas y forma. Van a contar también con ángulos, vértices y lados correspondientes que quiere decir que se encuentran en la misma posición.

Los **ángulos correspondientes** se encuentran en la misma posición con respecto al otro triangulo y son los siguientes: **"a"** y **"n"**; **"b"** y **"o"**; **"c"** y **"m"**. Las dos líneas rojas indican que tanto el lado **"ab"** y **"no"** son congruentes o sea que miden lo mismo, por tanto las líneas azules indican que esos lados también son congruentes.



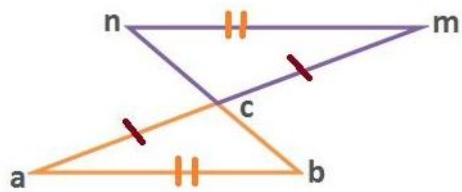
Los siguientes son triángulos rectángulos y ten presente que estos siempre forman un ángulo recto que va a medir 90 grados.

Los ángulos **S** y **L** forman una perpendicular y nos indica que su ángulo mide **90°**. Si el ángulo **"T"** mide **58°**, podemos obtener la medida de los otros ángulos. **"T"** es correspondiente a **"K"** por tanto también mide **58°.**

IMPORTANTE: La suma de todos los ángulos internos de un triángulo siempre es de **180°**. A 180 le restamos 58 y 90 del ángulo recto y tenemos.

180 – (58+90)= 32 que sería la medida de los ángulos **H y R**.

Contesta las preguntas en base a la figura (derecha):

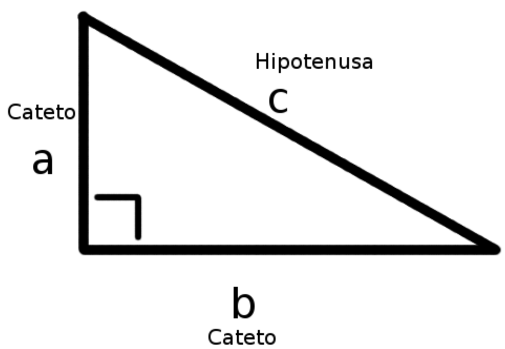


1. ¿Cuáles lados son congruentes?
2. Si el ángulo b= 55°, ¿Qué otro ángulo mide lo mismo?
3. ¿Qué ángulo es correspondiente a "m"?
4. Si los ángulos opuestos a su vértice miden 80°.
   ¿Cuál es la medida de los ángulos restantes?

1.
2.
3.
4.

TEORÉMA DE PITÁGORAS

Hace mucho tiempo, un matemático griego llamado Pitágoras descubrió una propiedad interesante de los triángulos rectángulos: la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos es igual al cuadrado de la longitud de la hipotenusa del triángulo. A esta propiedad *que tiene muchas aplicaciones en la ciencia, el arte, la ingeniería y la arquitectura,* se le conoce como: Teorema de Pitágoras.



$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$a^2 = c^2 - b^2$$
$$b^2 = c^2 - a^2$$

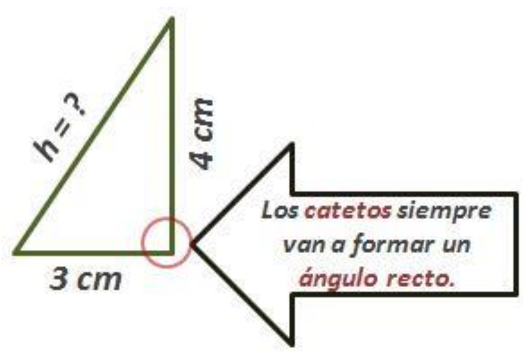
$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$
$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

Pitágoras estudió los triángulos rectángulos, y las relaciones entre los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo, antes de derivar su teoría.

Escanea el código QR y ve atentamente al vídeo tutorial de cómo trabajar el teorema de Pitágoras.

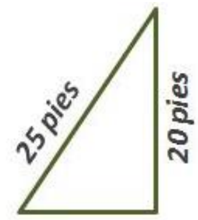
Ejemplo.

Para saber el valor de la hipotenusa se debe obtener la suma de los cuadrados de los catetos y finalmente sacar la raíz cuadrada.



Ejemplo:

Para obtener el valor de un cateto cuando tenemos dos valores (hipotenusa y un cateto)



Para obtener la raíz cuadrada en la calculadora encuentra el símbolo $\sqrt{\square}$
Con la calculadora

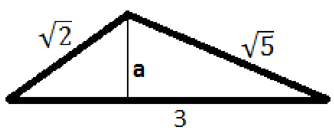
$25 +$ SHIFT $+ \sqrt{\square} = 5$

$a^2 + b^2 = c^2$
$a^2 + 20^2 = 25^2$ (Se sustituyen valores)
$a^2 + 400 = 625$ (Se resta c – b)
$625 – 400 = 225$ (se obtiene la raíz cuadrada)
$\sqrt{225} = 15$ pies

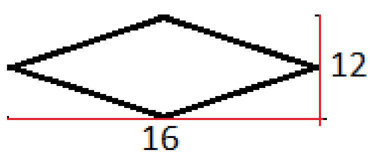
EJERCICIO 04. Lee detenidamente cada uno de los siguientes enunciados y resuelve cada uno de estos problemas empleando el teorema de Pitágoras.

Redondea la respuesta a la unidad más cercana.

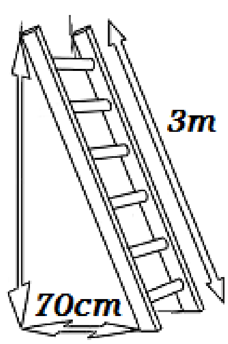
1. Si los catetos de un triángulo rectángulo miden 7 cm y 12 cm, ¿Cuál es el valor de la hipotenusa?
2. Si la hipotenusa de un triángulo rectángulo es 40 pies y uno de sus catetos es de 35 pies, ¿cuál es la medida del otro cateto?
3. Un poste mide 25 pies de altura y tiene un cable de contención de 28. ¿Cuál es la distancia que va del extremo del cable al pie del paste?
4. Una escalera que mide 25 pies de largo esta inclinada en una barda y la distancia de la escalera al pie de una barda es de 15 pies. ¿Cuál es la altura de la barda si va del pie de la barda al extremo alto de la escalera?
5. Calcular la hipotenusa del triángulo rectángulo de lados 3cm y 4cm.
6. Si la hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 2cm y uno de sus lados mide 1cm, ¿cuánto mide el otro lado?
7. Calcular la hipotenusa del triángulo rectángulo cuyos lados miden $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$.
8. Calcular la altura del siguiente triángulo sabiendo que sus lados miden $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ y su base 3.



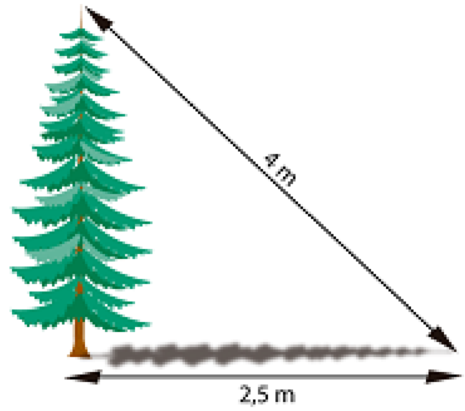
9. Calcular el perímetro del siguiente rombo si sabemos que sus diagonales (altura y anchura) miden 16 y 12.



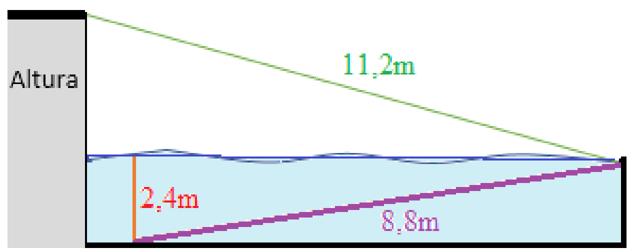
10. Calcular la altura que podemos alcanzar con una escalera de 3 metros apoyada sobre la pared si la parte inferior la situamos a 70 centímetros de ésta.



11. Al atardecer, un árbol proyecta una sombra de 2,5 metros de longitud. Si la distancia desde la parte más alta del árbol al extremo más alejado de la sombra es de 4 metros, ¿cuál es la altura del árbol?

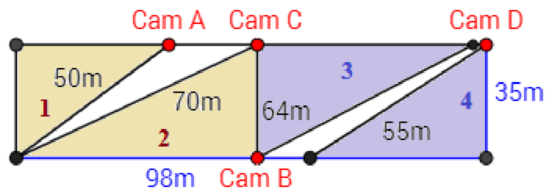


12. Un clavadista está entrenando en una piscina con una plataforma. Cuando realiza el salto, cae a una distancia de 1 metro de la plataforma sumergiéndose 2,4 metros bajo el agua. Para salir a la superficie, bucea hasta el final de la piscina siguiendo una línea transversal de 8,8 metros de longitud.



13. Si la longitud desde la parte superior de la plataforma al lugar en donde emerge del agua es de 11,2 metros, ¿cuál es la altura de la plataforma (desde el nivel del agua)?

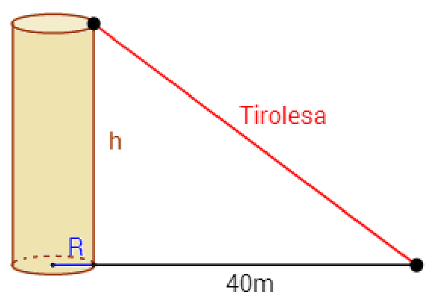
14. Un aparcamiento con forma rectangular de dimensiones 35x98 metros es controlado por cuatro cámaras de vigilancia.



La cámara A observa el área 1; la cámara B, el área 2; la cámara C, el área 3; y la cámara D, el área 4.

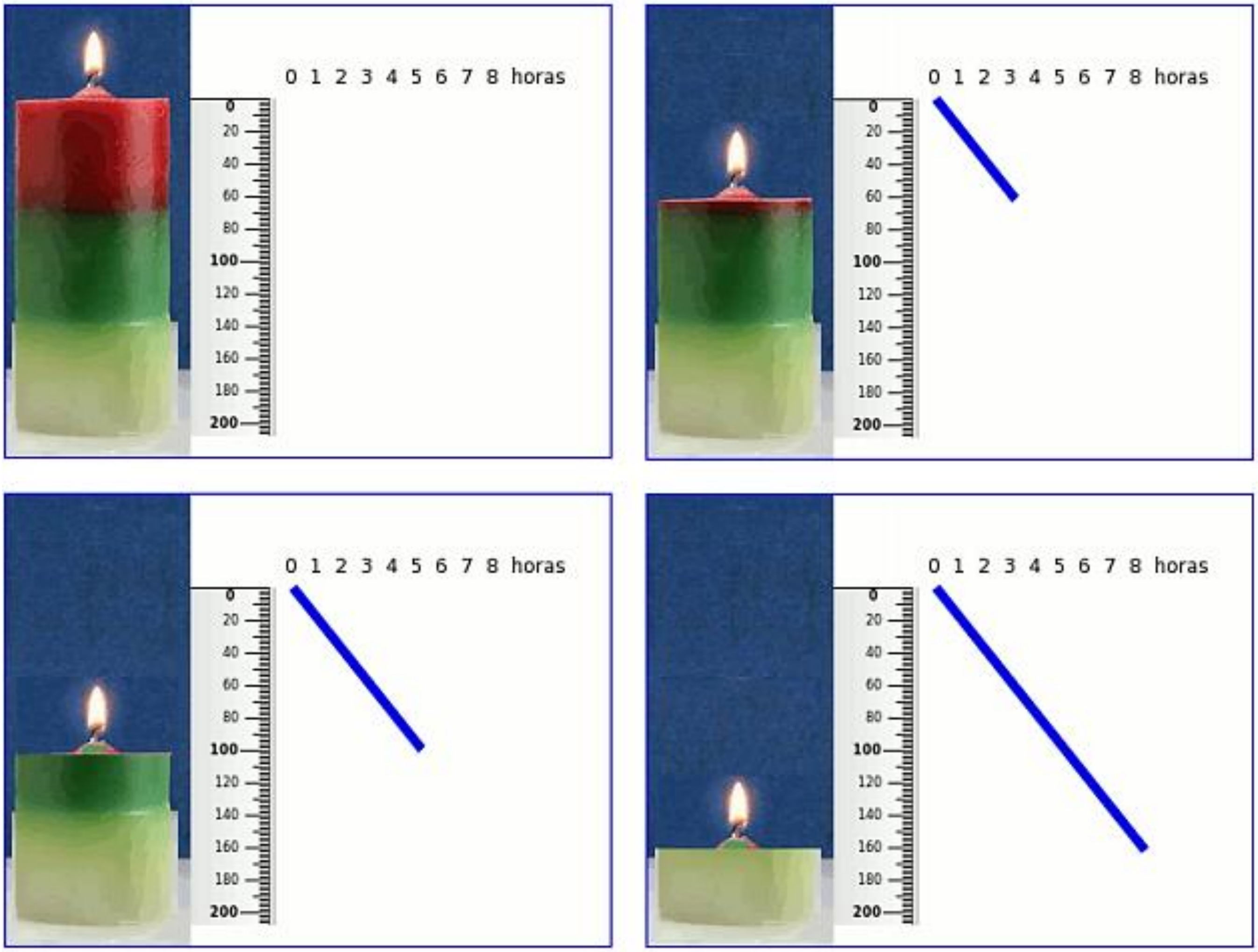
Calcular el porcentaje del área del aparcamiento que no es vigilada por ninguna cámara.

15. Un parque de diversiones quiere construir una nueva atracción que consiste en una tirolesa que parte desde la base superior de una columna con forma cilíndrica. Si el radio de la columna es R=2mR=2m metros y el área de su lateral es de 120 metros cuadrados, calcular la longitud del cable de la tirolesa para que alcance el suelo a 40 metros de distancia de la columna.



FUNCIONES Y RELACIÓN

PARA INICIAR…



INVESTIGACIÓN 01: si una sandía pesa 3kg y otra pesa 6kg nos cobrarán el doble por la segunda. Pero, si la primera tiene un diámetro de 15 cm y la otra lo tiene de 30 cm, ¿el precio de la segunda será el doble que el de la primera?

Intenta encontrar la respuesta y dar una explicación razonada a la misma.

FUNCIÓN DE PROPORCIÓN DIRECTA

Se llama función de proporcionalidad directa o, simplemente, función lineal a cualquier función que relacione dos magnitudes directamente proporcionales (x, y).

Su ecuación tiene la forma:

$$y = mx \quad ó \quad f(x) = mx$$

El factor m es la constante de proporcionalidad y recibe el nombre de pendiente de la función porque, como veremos en la siguiente sección, indica la inclinación de la recta que la representa gráficamente.

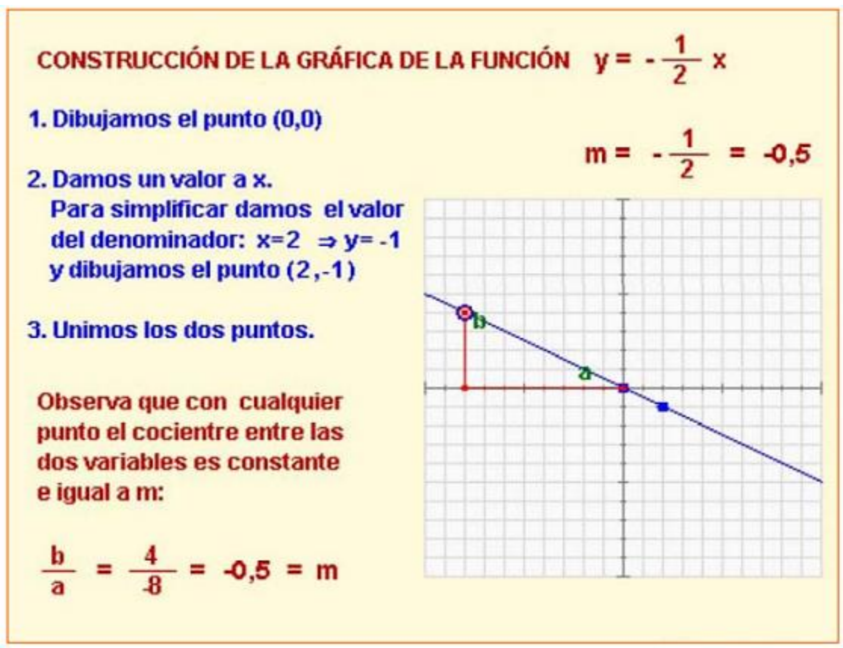
Recuerda: dos magnitudes son directamente proporcionales si su cociente es constante.

Una función lineal es una función cuyo dominio son todos los números reales, cuyo codominio también todos los números reales, y cuya expresión analítica es un polinomio de primer grado.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA

Como has visto, las funciones lineales se representan gráficamente como líneas rectas. Además, como y = mx, si x = 0 entonces y = 0; por lo tanto la gráfica de todas las funciones lineales pasa por el punto (0, 0).

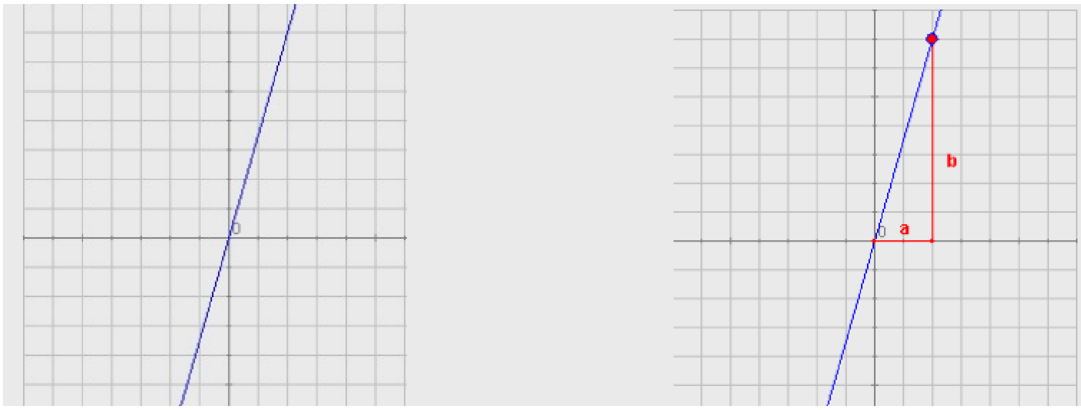
Para dibujar la gráfica basta con obtener las coordenadas de otro punto, dando un valor arbitrario a la x e unir ese punto con el origen de coordenadas (0, 0). Si x = 1, entonces y=m, por tanto m representa la variación de la y por cada unidad de x, es decir, la inclinación o pendiente de la recta. Si m es positiva, representa la cantidad que sube la y por cada unidad de x y si m es negativa la cantidad que baja.



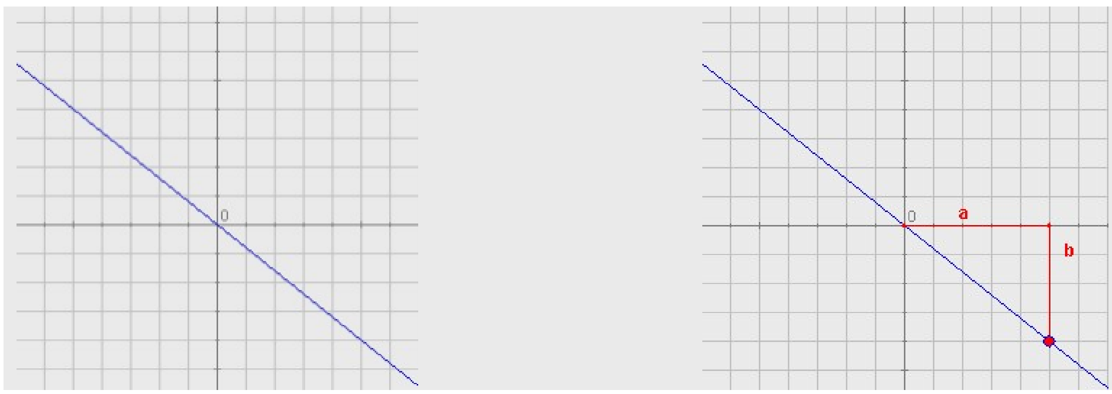
EJERCICIO 05: investiga y determina si las relaciones entre las parejas de magnitudes siguientes son lineales o no, escribiendo para ello la ecuación que las relaciona. Resuelve en hojas aparte y entrégaselas a tu catedrático/a, como te lo indique.

- **a.** Relación entre el precio inicial y el precio rebajado con un 10%.
- **b.** Relación entre el peso y el volumen de un material en condiciones constantes de presión y temperatura.
- **c.** Un banco ofrece un depósito anual al 5% con una comisión fija de 20€. Relación entre la cantidad invertida y los intereses recibidos.
- **d.** Relación entre el área de un cuadrado y la longitud de su lado.

Determina las ecuaciones de las siguientes funciones cuyas gráficas son:



Buscamos un punto de coordenadas enteras (no es estrictamente necesario pero es más cómodo si es posible).
a = 2, b = 7. La pendiente es m=7/2 y la ecuación es:



En este caso a = 5 y b = -4 (le asignamos un valor negativo porque la recta es decreciente).
La pendiente es, pues, m = -4/5 y la ecuación:

FUNCIÓN AFÍN

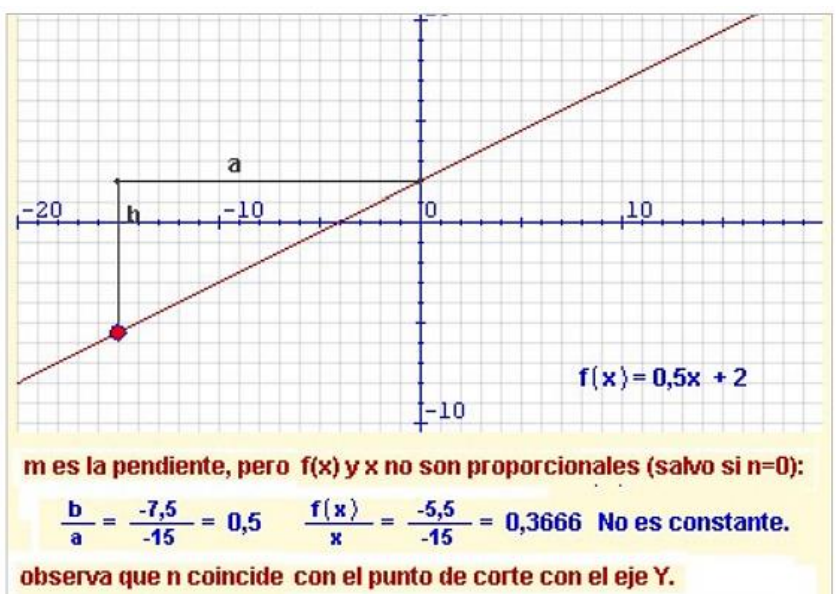
Si a dos magnitudes directamente proporcionales se les aplica alguna condición inicial, la función que las liga ya no es totalmente lineal (las magnitudes ya no son proporcionales).

Se dice que es una función afín y su forma es: **y = mx + n** ó **f(x) = mx + n**

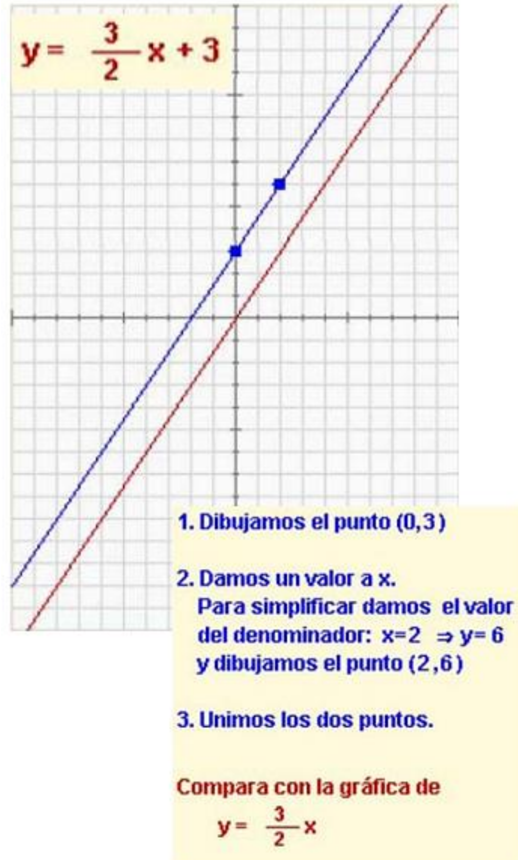
La **pendiente**, m, sigue siendo la constante de proporcionalidad y el término n se denomina **ordenada en el origen** porque es el valor que toma y (ordenada) cuando x vale 0 (abscisa en el origen).

Recuerda: Ahora el cociente entre f(x) y x no es constante.

Representación gráfica Las funciones afines se representan también mediante líneas rectas, pues el término independiente que



las diferencia de las funciones de proporcionalidad solo produce una traslación hacia arriba o hacia abajo de la gráfica de éstas.



Para dibujar la gráfica necesitamos obtener dos puntos:

1. Uno nos lo proporciona la propia ecuación, pues, como hemos visto, la ordenada en el origen, n, nos indica que la recta pasa por el punto (0, n).
   El otro punto se obtiene dando un valor cualquiera a x y obteniendo el correspondiente valor de y. Uniendo los dos puntos tenemos la gráfica de la función.

En el caso de expresar una Función Lineal agregando una constante que determine el valor en dónde la gráfica nos muestre en qué momento toca al eje "y", se expresa por medio de la *Ecuación Canónica:*

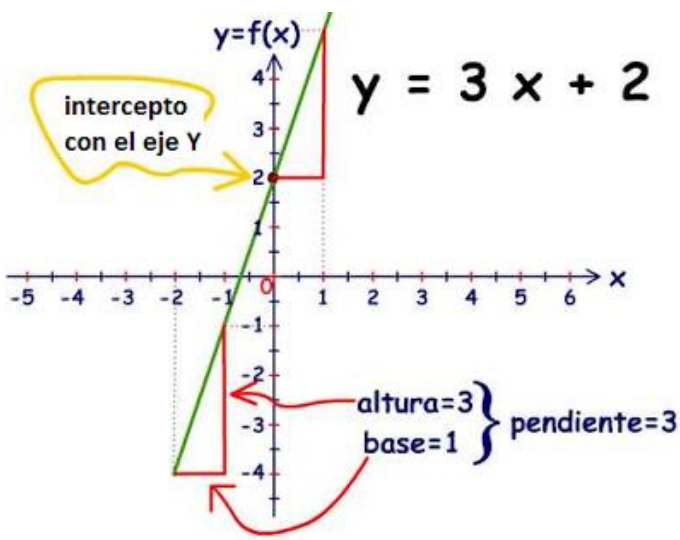
f(x) = mx + b ó ***y = mx + b***

…en donde *m* es la pendiente de la recta y *b* es el intercepto con el eje Y.

Por ejemplo:

Son funciones lineales:

f(x) = 3x + 2
g(x) = - x + 7 h(x) = 4 (en esta m = 0 por lo que 0x no se pone en la ecuación).



Esta es la gráfica de la función lineal *y = 3x + 2.*

Vemos que m = 3 y b = 2 (de la forma *y = mx + b*)

Este número **m** se llama pendiente de la recta y es la relación entre la altura y la base, aquí vemos que por cada unidad recorrida en **x** la recta sube 3 unidades en **y** por lo que la pendiente es m = 3 & **b** es el intercepto de la recta con el eje Y (donde la recta se cruza con el eje Y).

Volvamos al ejemplo de las funciones lineales:

f(x) = 3x+2

Si x es 3, entonces f (3) = 3*3+2 = 11

Si x es 4, entonces f (4) = 3*4+2 = 14
Si x es 5, entonces f (5) = 3*5+2 = 17

Cada vez que la **x** se incrementa en 1 unidad, el resultado, esto es, **f(x)**, se incrementa en **3** unidades. **Si el valor de la pendiente es positivo la función es Creciente.** Preste atención en que los valores de **x** y de **f(x)** NO SON PROPORCIONALES.

Lo que son proporcionales son los incrementos.

g(x) = -3x+7

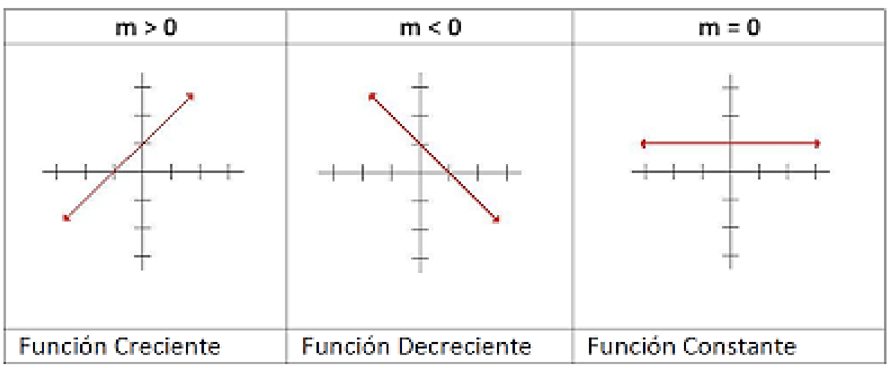
Si x= 0, entonces g (0) = -3*(0) +7 = 0+7 = 7
Si x= 1, entonces g (1) = -3*(1) +7 = -3+7 = 4
Si x= 2, entonces g (2) = -3*(2) +7 = -6+7 = 1

Cada vez que la **x** se incrementa en 1 unidad, el resultado, esto es, **g(x)**, disminuye en **3** unidades. **Si el valor de la pendiente es negativo la función es Decreciente.**

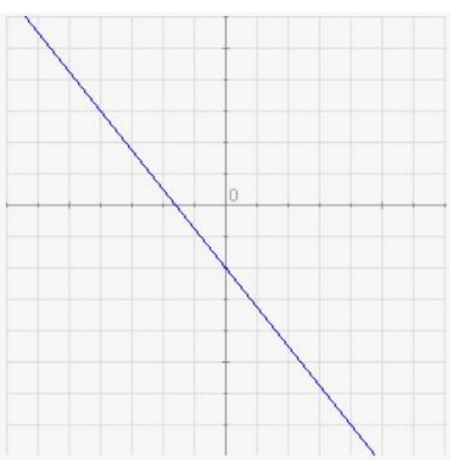
h(x) = 4

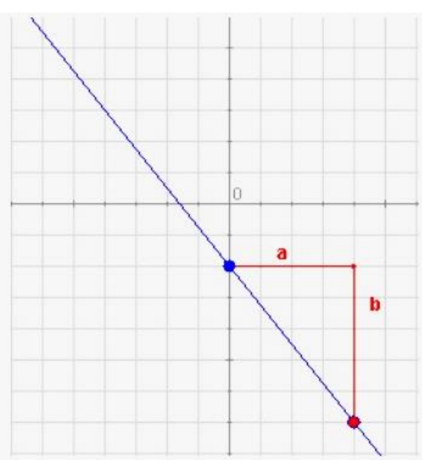
Si x= 0 , entonces h(0) = 4
Si x= 98 entonces h(98) = 4

Cada vez que la **x** se incrementa en 1 unidad, el resultado, esto es, **h(x)**, NO aumenta. **Es la función constante**. Su gráfica es una recta paralela al eje X.
Esta es la representación gráfica de los tres tipos de funciones descritas.

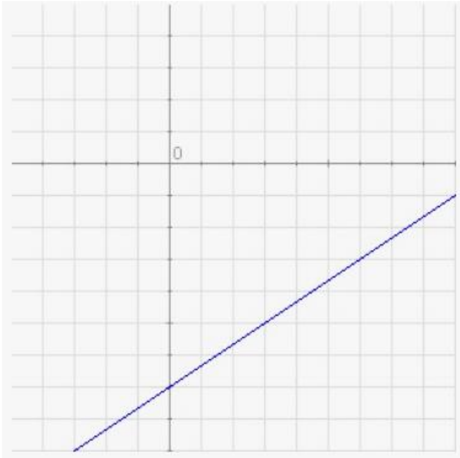


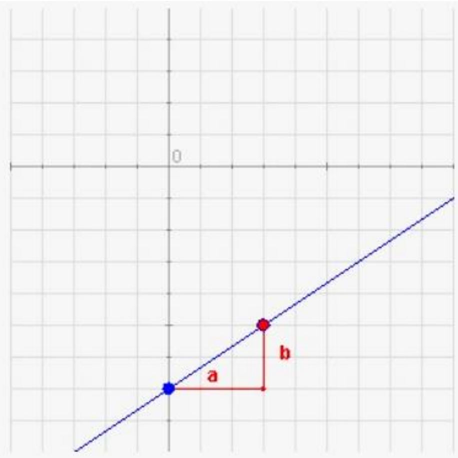
EJERCICIO 06: determina las ecuaciones de las funciones afines cuyas gráficas son:





Corta al eje Y en el punto (0,-2), luego n=-2. Ahora buscamos otro punto de coordenadas enteras si es posible (4,-7) y calculamos sus distancias horizontal y vertical al punto (0,-2): a = 4, b = -5 (Recuerda: negativo por ser una recta decreciente). La pendiente es m=-5/4 y la ecuación es:



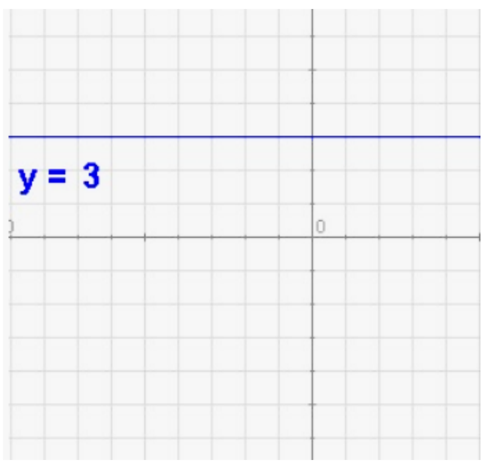


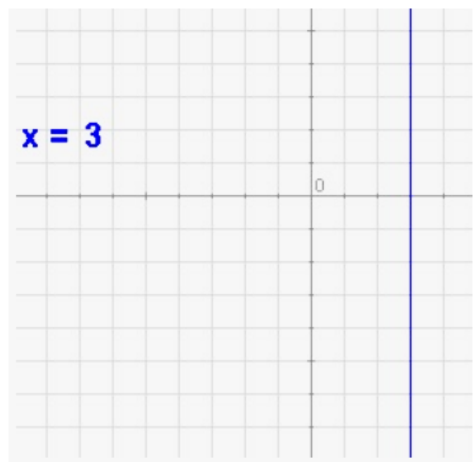
En este caso n=-7, a=3 y b=2. La pendiente es, pues, m = 2/3 y la ecuación:

EJERCICIO 07:

RESUELVE Y APRENDE. Casos particulares:

Si la pendiente es cero, la ecuación es y = n y la función es constante.





Si la recta es vertical la ecuación es x = k y no es una función.

Decimos que en este caso la pendiente es infinita.

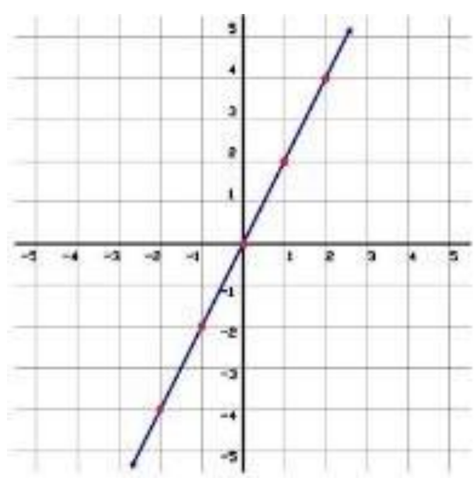
Representa gráficamente las siguientes funciones lineales ***y = 2x*** y ***y = - 3x + 4***

SUGERENCIA: primero elabora una tabla de valores, luego ubica los pares de puntos de la tabla en el plano cartesiano y finalmente únelos con una línea recta.

Los valores de ***x*** son asignados arbitrariamente o a tu gusto "*te aconsejo usar valores pequeños para facilitar las operaciones*" luego en la ecuación remplazamos la ***x*** por cada valor de la tabla.

1) y = 2x

Vamos a hacerlo con dos valores de x para que sepas de donde salen los valores.



Para x = - 2, y = 2(-2) = -4 quedando la pareja (-2, -4).
Para x = 1, y = 2(1) = 2 quedando la pareja (1, 2).

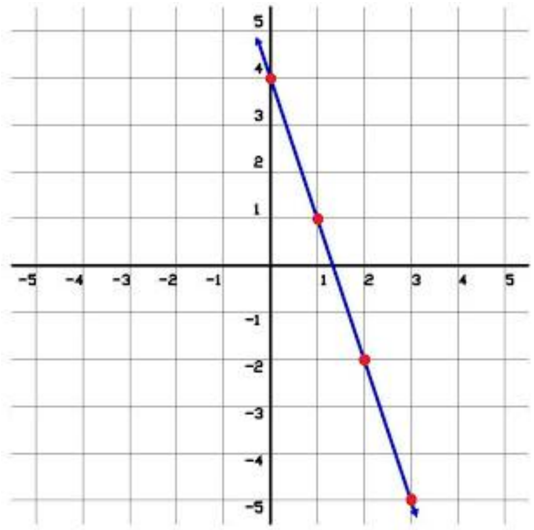
x	**y = 2x**
-2	-4
-1	-2
0	0
1	2
2	4

2) y = - 3x + 4

Vamos a hacerlo con dos valores de x para que sepas de donde salen los valores.

Para x = - 1, y = -3(-1)+ 4 = 7 quedando la pareja (-1, 7).
Para x = 2, y = -3(2) + 4 = -2 quedando la pareja (2, -2).

x	**y = - 3x + 4**
-1	7
0	4
1	1
2	-2
3	-5



Para finalizar…

Sabiendo que, una función cuyo dominio son todos los números reales, cuyo codominio son también todos los números reales, y cuya expresión analítica es un polinomio de primer grado.

Podemos definir:

$$f: R \to tal\ que\ R\ \ f(x) = ax + b, en\ donde\ a\ y\ b\ son\ números\ reales, es\ una\ función\ lineal$$

Este último renglón se lee: f de R en R tal que f de equis es igual a ax + b.

Por ejemplo, son funciones lineales f: f(x) = 2x+5, g: g(x) = -3x+7, h: h(x) = 4

Las funciones lineales son polinomios de primer grado.

Una función lineal cumple además, que el **incremento** de los valores de los elementos del dominio es proporcional al **incremento** de los valores en el codominio, siempre que **a** **no sea cero.**

Este número **a** se llama pendiente o coeficiente angular de la recta.

Volvamos a esto ejemplos de funciones lineales f: f(x) = 2x+5 , g: g(x) = -3x+7, h: h(x) = 4

f: f(x) = 2x+5 si x es 3, entonces f(3) = 2.3+5 = 11
si x es 4, entonces f(4) = 2.4+5 = 13
si x es 5, entonces f(5) = 2.5+5 = 15

Cada vez que la **x** se incrementa en 1 unidad, el resultado, esto es, **f(x)**, se incrementa en **2** unidades.

Preste atención en que los valores de **x** y de **f(x)** NO SON PROPORCIONALES.

Lo que son proporcionales son los incrementos.

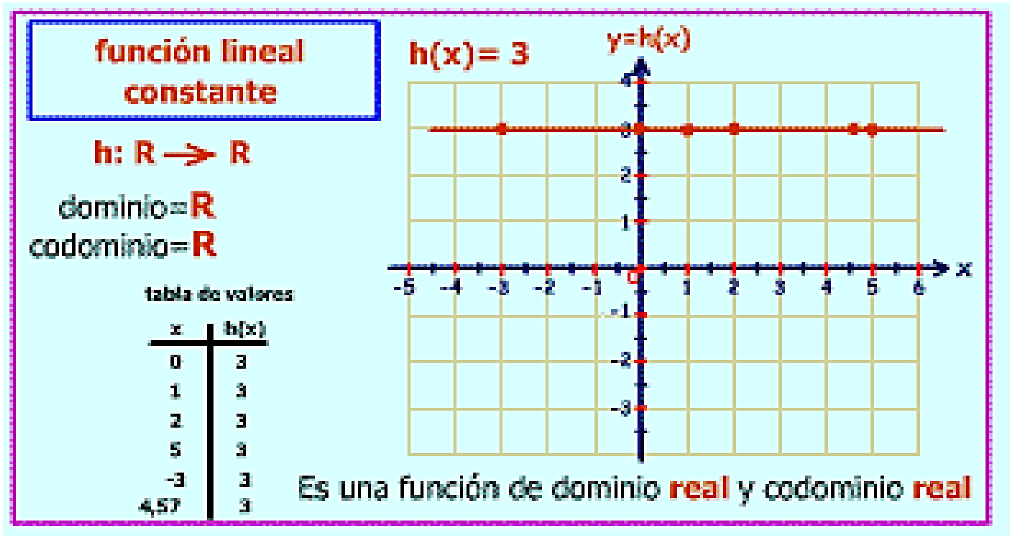
g: g(x) = -3x+7 si x= 0, entonces g(0) = -3.(0) +7 = 0+7 = 7
si x= 1, entonces g(1) = -3.(1) +7 = -3+7 = 4
si x= 2, entonces g(2) = -3.(2) +7 = -6+7 = 1

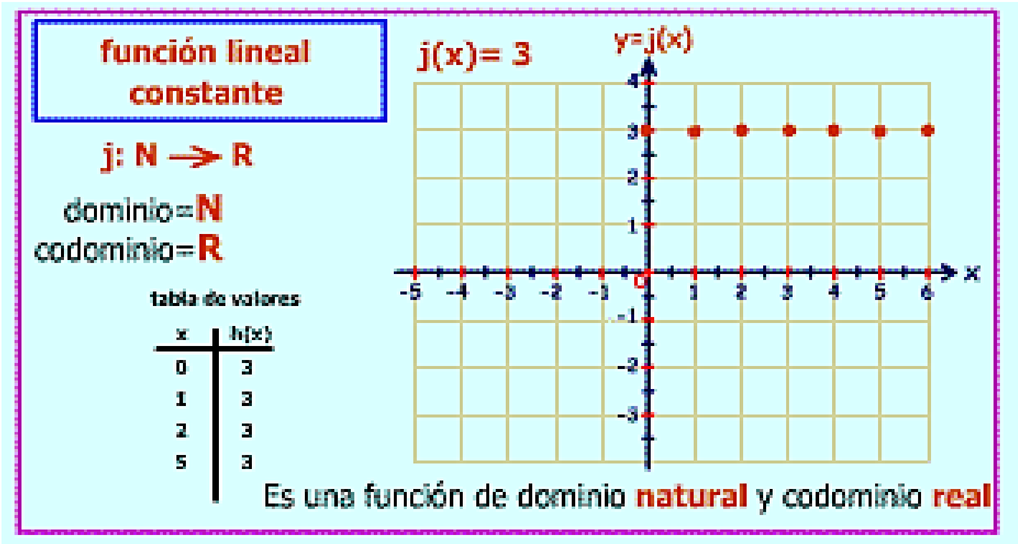
Cada vez que la **x** se incrementa en 1 unidad, el resultado, esto es, **g(x)**, disminuye en **3** unidades.

h: h(x) = 4 si x= 0 , entonces h(0) = 4
si x= 98 , entonces h(98) = 4

Cada vez que la **x** se incrementa en 1 unidad, el resultado, esto es, **h(x)**, NO aumenta. Es la función constante.

Su gráfica es una recta paralela al eje OX.





¿Qué diferencia fundamental y muy importante hay entre las funciones h y j?

Parecería, a primera vista, que son muy parecidas. Las "fórmulas" de ambas son iguales. h(x)=3 y j(x)=3

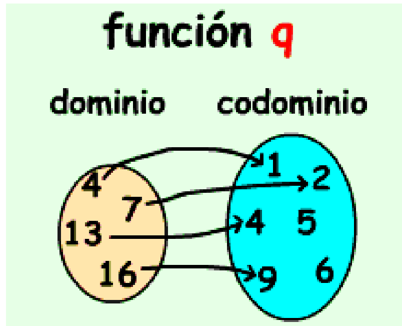
Sin embargo, son muy distintas porque mientras la función h tiene como dominio todos los números reales, la función j tiene como dominio los números naturales. Y como entre dos números naturales consecutivos no hay ningún otro número natural, no existe gráfica ni puntos entre ellos.

Esto es, entre el 17 y el 18 no hay ningún número natural. Entre el 17 y el 18 hay infinitos número reales. He ahí la diferencia.

La representación gráfica de h es una línea recta, pero la de j son puntos aislados, aunque son infinitos. Esto, por supuesto, ocurre no solo si son funciones constantes. Es para cualquier función. **El dominio es muy importante.**

Cuando **no** se especifica el dominio y codominio, se supone que son los mayores posibles. En el caso de las funciones lineales, es de R en R.

Veamos otro ejemplo:



Esta función, llamada q, **¿será lineal?** Supongamos, además, que es una función de R en R.

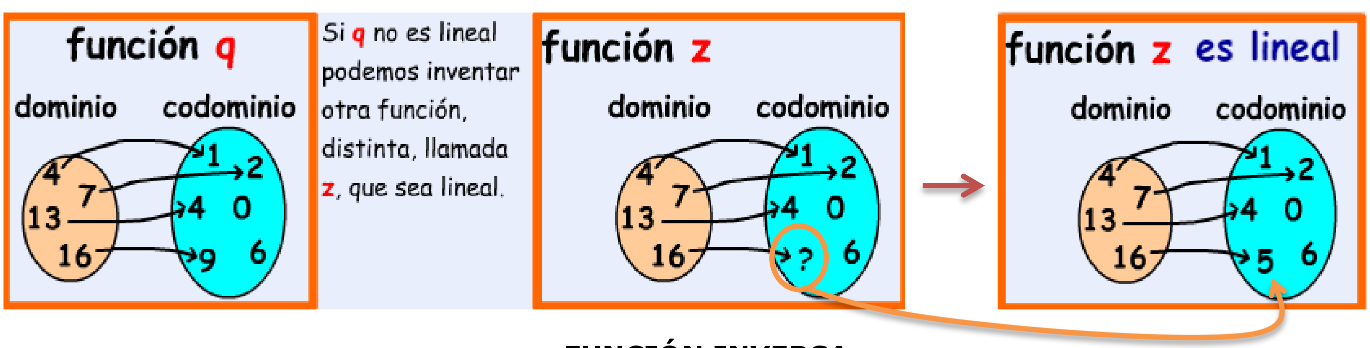
Para determinar esto tenemos que ver si las diferencias entre los valores en el dominio y codominio son proporcionales. Esto es, si cambian en la misma razón.

Dominio x	Codominio y
4	1
7	2
13	4
16	9

Dominio: de 4 a 7 aumenta en 3 Codominio: de 1 a 2 aumenta en 1.

Dominio: de 7 a 13 aumenta en 6 Codominio: de 2 a 4 aumenta en 2. Por ahora, **parece** que sí.

Dominio: de 13 a 16 aumenta en 3 Codominio: de 4 a 9 aumenta en 5 Se rompió la relación.



FUNCIÓN INVERSA

Existen diferentes definiciones de función inversa, aunque el concepto matemático es el mismo. Para hallar la inversa de una función no se requiere de la utilización de la definición.

DEFINICIÓN

Se llama función inversa o reciproca de f a otra función f^{-1} que cumple que:

Si $f(a) = b$, entonces $f^{-1}(b) = a$.

La notación f^{-1} se refiere a la inversa de la función f y no al exponente −1 usado para números reales. Únicamente se usa como notación de la función inversa.

PROPIEDADES

La inversa de una función cuando existe, es única. La inversa de una función cualquiera no siempre existe, pero la inversa de una función biyectiva siempre existe.

Las gráficas de f y f^{-1} son simétricas respecto a la función identidad y = x.

HALLAR LA FUNCIÓN INVERSA

Aunque existen varios métodos para hallar la inversa, los siguientes pasos ayudan a obtener la inversa de la función f (x).

Procedimiento:

Se sustituye f (x) por y es la función dada 2.Se intercambian x por y para obtener x = f (y) 3. Se despeja la variable 4.En la solución se escribe f^{-1} (x) en vez de y.

Por ejemplo:

Determina la inversa de la siguiente función:

$$f(x)= 4x + 5$$

Sustituyendo f(x) por y y = 4 x + 5 Se intercambian "x" por "y"

$$x = 4 y + 5$$

Despejando "y" x - 5 = 4y, x - 5/ 4 = y

$$f^{-1} (x)= x - 5/ 4$$

Finalmente se obtiene la inversa de f(x).

FUNCIÓN UNO A UNO PRUEBA DE LA RECTA HORIZONTAL (FUNCIÓN INVERSA)

Se ha estudiado cuando una ecuación en *x* y *y* define a *y* como función de *x*. *x* como función de *y*. En este caso tenemos la función inversa de la primera. No toda función definida a través de una ecuación tiene función inversa. El concepto de función uno a uno (biunívoca, inyectiva) es clave para definir la función inversa de una función dada. Se establece el criterio o prueba de la recta horizontal para determinar si la función es o no uno a uno.

Se propone una sucesión de pasos para obtener la inversa. La gráfica de la función inversa de *f* puede ser obtenida a partir de la gráfica de la función *f* reflejando esta última en la recta *y* = *x*.

APRENDIZAJE MODERNO

Para abordar este tema, haremos uso de una Tableta y/o Smartphone. Es importante hacer uso de la tecnología, para beneficio de tú aprendizaje.

En otras materias has podido encontrar las instrucciones para poder ingresar a los vídeo-tutoriales; este caso no es la excepción…

FUNCIÓN UNO A UNO (BIUNIVOCA)

Se estudia cuando una función tiene o no inversa. Para verificar si una función tiene o no función inversa se propone la prueba de la recta horizontal. Se establece la definición de función uno a uno.

CÓMO OBTENER LA FUNCIÓN INVERSA

Ejemplo:

Se recomiendan una serie de pasos para obtener la función inversa de una función dada.

Se desarrolla un ejemplo para obtener la función inversa de una función dada siguiendo los pasos recomendados.

EJERCICIO 08: para comprobar lo aprendido en el vídeo tutoriales, debes de realizar paso por paso la solución de los dos siguientes ejercicios:

Determinar, si existe, la función inversa de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2 + 1$

b) $g(x) = \frac{2}{x}$

c) $h(x) = (x-1)^3$

En hojas aparte, sigue paso a paso las instrucciones indicadas y con la ayuda de tú catedrático/a, deja constancia del procedimiento en dichas hojas y luego escribe tus respuestas en los espacios acá ubicados.

GRÁFICA DE LA FUNCIÓN INVERSA

Recuerde que la gráfica de la función $y = f(x + c)$ puede ser obtenida a partir de la gráfica de *f.*

La cuestión ahora es:

Si *f* tiene función inversa, ¿se puede obtener la gráfica de la función inversa a partir de la gráfica de *f* ?

Un ejemplo es resuelto paso a paso dando recomendaciones de trabajo.

EJERCICIO 09: para después del video. Determinar la función inversa de f, en el cuaderno la función y su inversa en el mismo plano.

$$f(x) = 2 - \sqrt{x+1}$$

EJERCICIO 10: determina la función inversa de las siguientes funciones lineales.

1. $f(x) = 2x + 1$

2. $f(x) = \dfrac{2x-3}{4}$

3. $f(x) = \dfrac{x+3}{x-2}$

4. $f(x) = x^2$

5. $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$

6. $f(x) = \dfrac{1}{x}$

7. $f(x) = \dfrac{2x-1}{2x+1}$

8. $f(x) = \sqrt{x}$

9. $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$

10. $f(x) = \dfrac{1}{2x-1}$

RELACIÓN

Para lograr esa comprensión es necesario adentrarnos en la noción de **Correspondencia,** ya que esta tiene un papel fundamental en las relaciones y funciones.

Lo primero es entender que **Correspondencia es equivalente a Relación**. En nuestra lengua, decir "en relación a", es equivalente a decir "corresponde a".

Ejemplos:

En una tienda comercial, cada artículo **está relacionado** con su precio; o sea, a cada artículo **le corresponde** un precio.

En la guía telefónica, cada cliente **está relacionado** con un número; o sea, a cada nombre de la guía **le corresponde** un número.

Definición matemática de Relación y de Función

En matemática, **Relación** es la correspondencia de un primer conjunto, llamado **Dominio,** con un segundo conjunto, llamado **Recorrido o Rango** , de manera que a cada elemento del Dominio le corresponde uno o más elementos del Recorrido o Rango.

Por su parte, una **Función** es una relación a la cual se añade la condición de que a cada valor del Dominio le corresponde **uno y sólo un valor** del Recorrido.

De las definiciones anteriores podemos deducir que todas las **funciones** son **relaciones**, pero **no todas** las **relaciones** son **funciones.**

También debemos agregar que toda ecuación es una **Relación**, pero no toda ecuación es una **Función.**

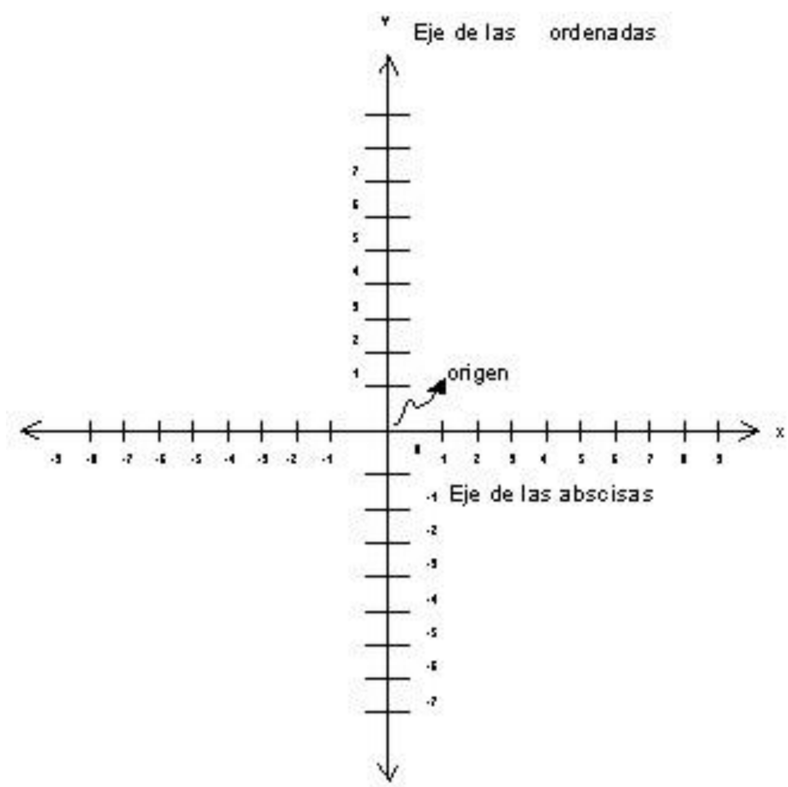
Todas las **Relaciones** pueden ser graficadas en el Plano Cartesiano.

PLANO CARTESIANO

El **plano cartesiano** está formado por dos rectas numéricas perpendiculares, una horizontal y otra vertical que se cortan en un punto. La recta horizontal es llamada **eje de las abscisas** o de las equis (x), y la vertical, **eje de las ordenadas** o de las yes, (y); el punto donde se cortan recibe el nombre de **origen**

Dos ejes perpendiculares entre sí.

El **plano cartesiano** tiene como finalidad describir la posición de puntos, los cuales se representan por sus **coordenadas o pares ordenados**.



Las coordenadas se forman asociando un valor del eje de las equis a uno de las yes, respectivamente, esto indica que un **punto (P)** se puede ubicar en el plano cartesiano tomando como base sus coordenadas, lo cual se representa como: **P (x, y)**

Para localizar puntos en el plano cartesiano se debe llevar a cabo el siguiente procedimiento:

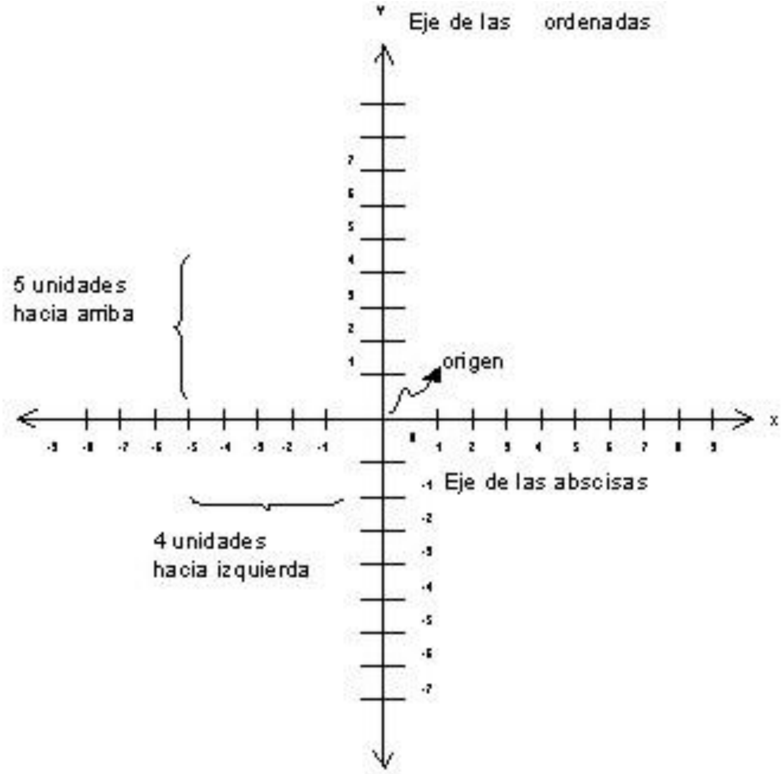
1. Para localizar la abscisa o valor de x, se cuentan las unidades correspondientes hacia la derecha si son positivas o hacia la izquierda si son negativas, a partir del punto de origen, en este caso el cero.
2. Desde donde se localiza el valor de x, se cuentan las unidades correspondientes (en el eje de las ordenadas) hacia arriba si son positivas o hacia abajo, si son negativas y de esta forma se localiza cualquier punto dadas ambas coordenadas.

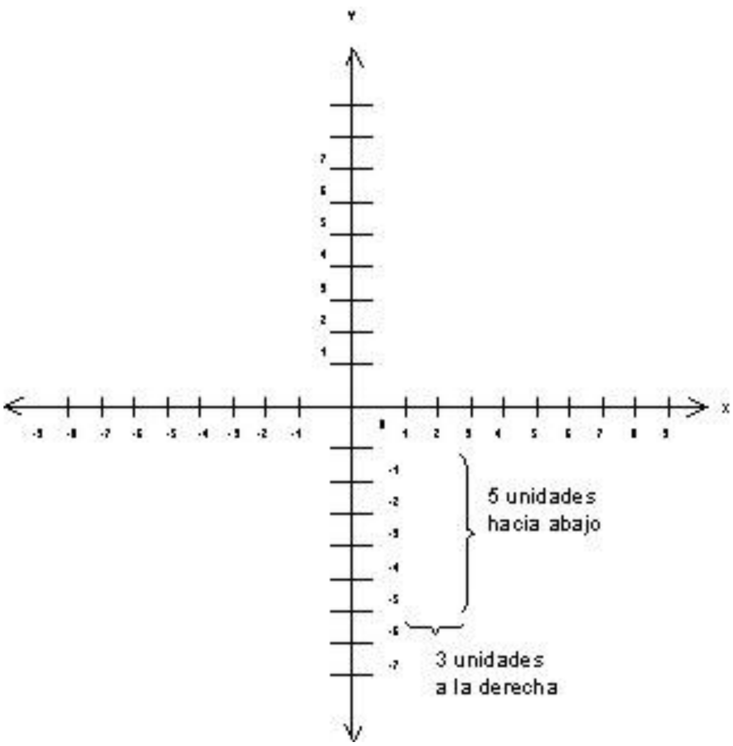
Ejemplo:

Localizar el punto A (-4, 5) en el plano cartesiano.

El punto A se ubica 4 lugares hacia la izquierda en la abcisa (x) y 5 lugares hacia arriba en ordenada (y).

De modo inverso, este procedimiento también se emplea cuando se requiere determinar las coordenadas de cualquier punto que esté en el plano cartesiano.





Ejemplo:

Determinar las coordenadas del punto M.

Las coordenadas del punto M son (3,-5).

De lo anterior se concluye que:

Para determinar las coordenadas de un punto o localizarlo en el plano cartesiano, se encuentran unidades correspondientes en el eje de las **x** hacia la derecha o hacia la izquierda y luego las unidades del eje de las **y** hacia arriba o hacia abajo, según sean positivas o negativas, respectivamente. Dados dos conjuntos A y B una relación definida de A en B es un conjunto de parejas ordenadas (**par ordenado**) que hacen verdadera una proposición; dicho de otro modo, una relación es cualquier subconjunto del producto cartesiano A x B.

Ejemplo 1.

Si A = {2, 3} y B = {1, 4, 5}, encontrar tres relaciones definidas de A en B.

Solución. El producto cartesiano de A x B está conformado por las siguientes parejas o pares ordenados:
A x B = {(2, 1), (2, 4), (2, 5), (3, 1), (3, 4), (3, 5)}

Y cada uno de los siguientes conjuntos corresponde a relaciones definidas de A en B:

R1 = {(2, 1), (3, 1)}

R2 = {(2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)}
R3 = {(2, 4), (3, 5)}

La relación R1 se puede definir como el conjunto de pares cuyo segundo elemento es 1, esto es, R1 = {(*x* , *y*) / *y* = 1}.

La relación R2 está formada por los pares cuyo primer componente es menor que el segundo componente, R2 = {(*x* , *y*) / *x*< *y* }

Y la relación R3 está conformada por todos los pares que cumplen con que el segundo componente es dos unidades mayor que el primer componente, dicho de otro modo, R3 = {(*x* , *y*) / *y* = x + 2}

Así, se puede continuar enumerando relaciones definidas a partir de A x B. Como se puede ver, la regla que define la relación se puede escribir mediante **ecuaciones** o **desigualdades** que relacionan los valores de ***x*** e ***y*** . Estas reglas son un medio conveniente para ordenar en pares los elementos de los dos conjuntos.

Ejemplo 2.

Dados los conjuntos C = {1, −3} y D = {2, 3, 6}, encontrar todos los pares ordenados (*x* , *y*) que satisfagan la relación

R = {(*x* , *y*) / *x* + *y* = 3}

Solución. El producto cartesiano de C x D está formado por los siguientes pares ordenados:

C x D = {(1, 2), (1, 3), (1, 6), (−3, 2), (−3, 3), (−3, 6)}

Las parejas ordenadas que satisfacen que la suma de sus componentes sea igual a 3 son:

R = {(1, 2), (−3, 6)}

Toda relación queda definida si se conoce el conjunto de partida, el conjunto de llegada y la regla mediante la cual se asocian los elementos. En el ejemplo anterior, el conjunto de partida corresponde al conjunto **C**, el conjunto de llegada es el conjunto **D** y la expresión ***x* + *y* = 3** es la regla que asocia los elementos de los dos conjuntos.

DOMINIO Y RANGO DE UNA RELACIÓN

El **dominio** de una relación es el conjunto de **preimágenes;** es decir, el conjunto formado por los elementos del conjunto de partida que están relacionados. Al conjunto de **imágenes**, esto es, elementos del conjunto de llegada que están relacionados, se le denomina **recorrido o rango**.

Ejemplo 3.

Sea A = {1, 2, 3, 4} y B = {4, 5, 6, 7, 8} y R la relación definida de A en B determinada por la regla " *y* es el doble de *x* " o " *y*= 2 *x* ", encontrar dominio y rango de la relación.

Solución. El total de pares ordenados que podemos formar, o producto cartesiano es:

A x B = {(1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7), (1, 8), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (2, 7), (2, 8), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (3, 7), (3, 8), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (4, 7), (4, 8)}
Pero los pares que pertenecen a la relación R (y = 2x) son solo:

R = {(2, 4), (3, 6), (4, 8)}
En esta relación vemos que: "4 es el doble de 2"; esto es, "4 es la imagen de 2 bajo R", dicho de otro modo, "2 es preimagen de 4".

Así, el dominio y rango son:

D = {2, 3, 4}
Rg = {4, 6, 8}

Según lo que vemos, ¿Qué relación hay entre el Dominio y el conjunto de partida?

En el Dominio falta el elemento 1 del conjunto de partida, por lo tanto el Dominio es un subconjunto de A.

Otra pregunta: ¿Todo elemento del conjunto de llegada es elemento del rango?

La respuesta es no, pues en el rango faltan el 5 y el 7.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LAS RELACIONES

Los pares ordenados se pueden representar gráficamente por medio de **diagramas sagitales** o por medio de puntos en el**plano cartesiano**. Veamos el siguiente ejemplo.

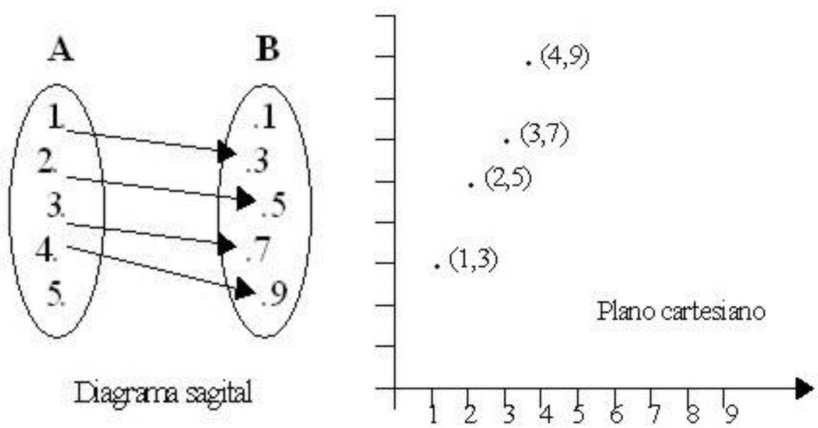
Ejemplo 4.

Si A = {1, 2, 3, 4, 5} y B = {1, 3, 5, 7, 9} y R la relación definida por la regla
R = {(*x* , *y*) / *y* = 2 *x* + 1}, graficar R.

Solución. Los pares ordenados que pertenecen a la relación (que cumplen con y = 2x + 1) son:

R = {(1, 3), (2, 5), (3, 7), (4, 9)}

Y la gráfica correspondiente es la siguiente:



EJERCICIO 11. Encuentra el valor final de cada función, sustituyendo en la variable el valor que se le ha sido asignado, dibuja el gráfico correspondiente.

1) Considerando los siguientes valores para x = -3-, -2, -1, 0, 1, 2 y 3; tabular la siguiente función: f(x)= 2x – 1.
2) Considerando los siguientes valores para x = -4, -1, 0, 1, 4; tabular la siguiente función: f(x)= 3x + 0.
3) Considerando los siguientes valores para x =3-, -2, -1, 0, 1, 2 y 3; tabular la siguiente función: f(x)= x – 5.
4) Considerando los siguientes valores para x = -5, -3, 0, 1, 3 y 5; tabular la siguiente función: f(x)= 2x + x – x.
5) Considerando los siguientes valores para x = -4, -2, 0, 2 y 4 tabular la siguiente función: f(x)= 4x + 2x – 5x.