CBS

Colegio Bautista Shalom

Matemática Financiera II

Quinto PAE

Cuarto Bimestre

Contenidos

ANUALIDADES (Recordatorio)

ANUALIDADES VENCIDAS

- ✓ VALOR FINAL DE UNA ANUALIDAD VENCIDA.
- ✓ VALOR ACTUAL DE UNA ANUALIDAD VENCIDA.
- ✓ CALCULO DEL TIEMPO DE UNA ANUALIDAD VENCIDA.
- ✓ CÁLCULO DE LA TASA DE INTERÉS EN UNA ANUALIDAD VENCIDA.

ANUALIDADES ANTICIPADAS

- ✓ VALOR FINAL DE UNA ANUALIDAD ANTICIPADA.
- ✓ INTERPRETACIÓN DE LA ANUALIDAD ANTICIPADA.
- ✓ DIFERENCIA.
- ✓ VALOR PRESENTE DE UNA ANUALIDAD ANTICIPADA.
- ✓ CUADRO DE INTERPRETACIÓN.
- ✓ CUADRO DE INTERPRETACIÓN.
- ✓ CALCULO DE LA RENTA EN LA ANUALIDAD ANTICIPADA.
- ✓ CÁLCULO DEL TIEMPO DE UNA ANUALIDAD ANTICIPADA.
- ✓ CALCULO DE LA TASA DE INTERÉS DE UNA ANUALIDAD ANTICIPADA.

NOTA: conforme avances en tu aprendizaje de este contenido, tu catedrático/a indicará la actividad o ejercicio a realizar.

ANUALIDADES (RECORDANDO)

Si bien la palabra anualidad parece implicar pagos anuales, puede no ser este el caso. El intervalo entre los pagos puede ser y lo es con frecuencia menor de un año. Así dichos pagos pueden ser semestrales, trimestrales, mensuales, bimestrales etc. (pero no significa el pago anual), más bien trata de las transacciones de la empresa con pagos periódicos que generalmente son igual tomando en cuenta los ingresos, egresos y el tiempo.

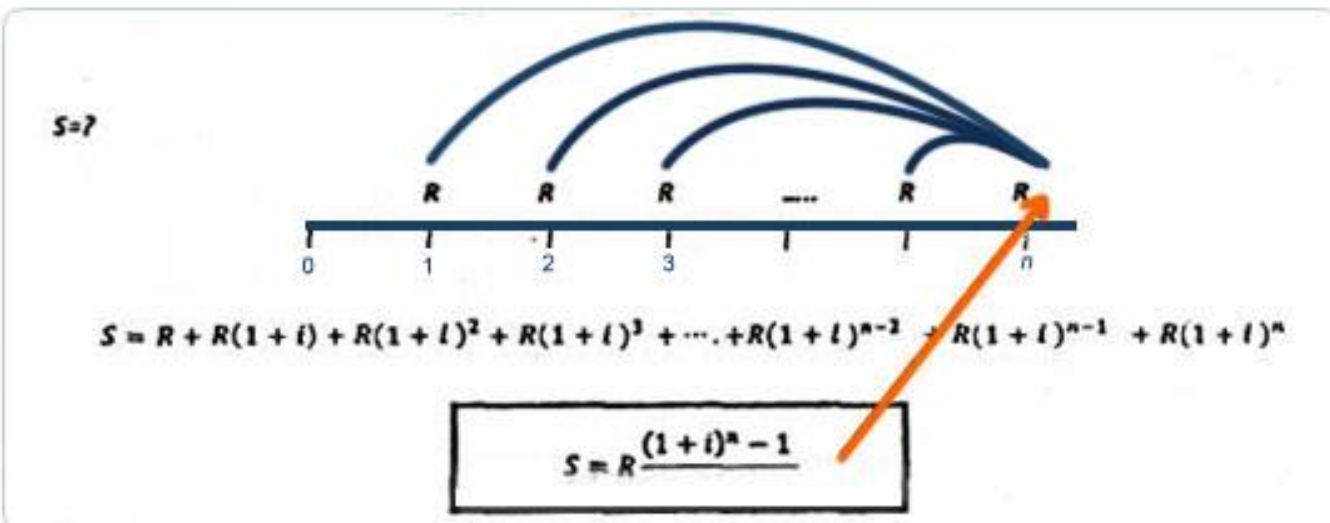
Tanto las empresas y las personas naturales cuando desean comprar algo, o invertir en una actividad, generalmente lo hacen con dinero prestado importe que deben pagar con pagos a realizar cada determinado tiempo.
Una anualidad se suele efectuar en los casos siguientes:

- **a)** Con el fin de constituir un fondo que llegue a alcanzar una suma determinada en un determinado de tiempo dado, es decir, constituir un capital.
- **b)** Con el fin de agotar un fondo en un número determinado de periodos, es decir, extinguir la deuda, que más adelante estudiaremos, estas dos partes.

Podemos citar a los dividendos sobre acciones, fondos de amortización, sueldos de cada mes, rentas de alquiler, impuestos, cuotas al club, pensiones escolares, amortización de crédito, rentas a jubilados, primas de seguros etc. según el caso.

ANUALIDADES VENCIDAS

VALOR FINAL DE UNA ANUALIDAD VENCIDA



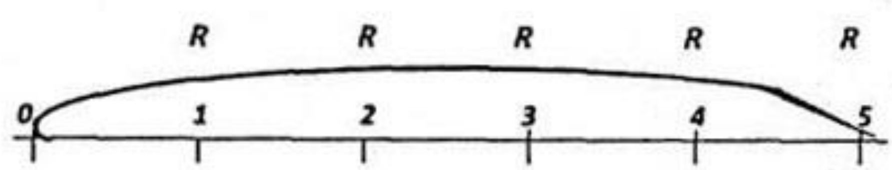
$$S = R + R(1+i) + R(1+i)^2 + R(1+i)^3 + \cdots + R(1+i)^{n-2} + R(1+i)^{n-1} + R(1+i)^n$$

$$\boxed{S = R\frac{(1+i)^n - 1}{\quad}}$$

Ejemplo 1: Una persona deposita al final de cada mes 1.000 quetzales al 5% interés mensual durante 5 meses. ¿Cuánto retira al final del 5to mes?

Datos

R = 1 000
n = 5 meses
i = 5 %
S = ?



1a Forma

$C_n = C_o(1+i)^n$ Intereses Ganados = Monto de la Anualidad – Total del deposito

1° Cuota = 1 000 (1 + 0,05) 4 = 1215,51   I = 5.525,63 – 5.000 = 525,63
2° Cuota = 1 000 (1 +0,05) 3 = 1157,52

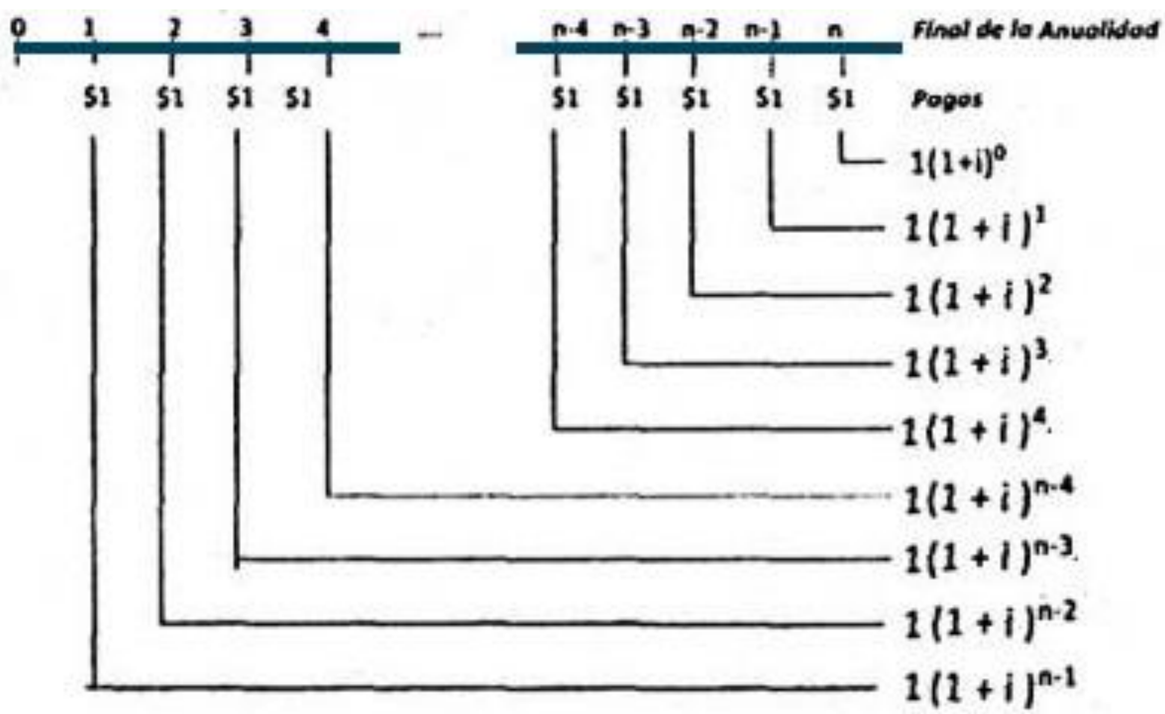
3° Cuota = 1 000 (1 + 0,05) 2 =1102,5
4° Cuota = 1 000 (1 + 0,05) 1 = 1050
5° Cuota = 1 000 (1 + 0,05) 0 = 1000
5 000 5.525,63

Cuadro de Interpretación

PERIODO	RENTA	INTERES	INCREMENTO DEL VALOR	SALDO
1	1.000			1.000
2	1.000	50	1.050	2.050
3	1.000	102,5	1.102,5	3.152,50
4	1.000	1.157,62	1.157,62	9.310,12
5	1.000	1.215,51	1.215,53	5.525,63
	5.000	5.25,63	5.525,63	

O bien se puede explicar también como los pagos periódicos R efectuados al final de cada periodo ganan intereses compuestos, hasta la fecha final.

Cada pago efectuado al final del periodo capitaliza los intereses en cada uno de los siguientes periodos:



$$1 + (1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + (1+i)^4 + \dots + (1+i)^{n-4} + (1+i)^{n-3} + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}$$

La expresión constituye una Progresión geométrica en la cual el primer término es 1, la razón común es (1+ i) y el número total de los términos es n. En algebra se demuestra que la suma de los términos de la Progresión geométrica es igual a:

$$S = a\frac{(r^n - 1)}{r - 1}$$

Donde **a** es el primer y r es la razón común sustituyendo los valores del problema sobro anualidades es la fórmula general tenemos:

$$S = \frac{1\,[(1+i)^n - 1]}{(1+i)-1} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Si la renta periódica es una cantidad $R por periodo en lugar de Q 1:

$$Sn = Rsn = R\,\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$S = R\,\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Dónde:
***S**: valor final de una anualidad vencida.*
***n**: tiempo o plazo de la anualidad vencida.*
***i**: tasa de interés de una anualidad vencida.*
***R**: pago periódico o renta de una anualidad vencida.*

CON FÓRMULA: Se resuelve el ejemplo anterior.

$$S = R\,\frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{1000(1+0{,}05)^5 - 1}{0{,}05}$$

$$S = 1000\,(5{,}5256) = 5525{,}63$$

Ejemplo 2: Hallar el valor final de una anualidad vencida de $ 5 000 pagaderos semestralmente durante 3,5 años al 18% capitalizable semestralmente.

Datos

R = 5 000
n = 3,5 años
i = 18 % cap.sem.
S = ?

Solución

$$s = R\,\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$S = \frac{5000(1+0{,}18/2)^7 - 1}{0{,}18/2}$$

$$S = \frac{5000(1+0{,}009)^7 - 1}{0{,}09}$$

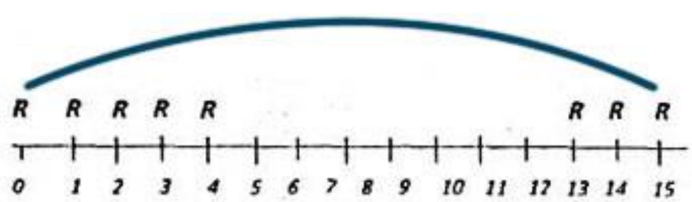
$$S = 46002{,}17$$

Respuesta: El valor que se pagará en los 3,5 años será de 46002,17 quetzales.

Ejemplo 3: El Sr Montero ahorro 600 quetzales, cada medio año y los invierte al 3% convertible bimestralmente durante 2 años y 6 meses al interés del 15% capitalizable bimestralmente. Hallar el importe acumulado en su ahorro.

Datos

R = 600
n =2 ½ año x 6 = 15
i = 15 % cap.sem→0,15/6 = 0,025
S = ?



Solución

$$S = R\,\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$S = \frac{600(1+0{,}025)\,15-1}{0{,}025}$$

$$S = 10.759{,}156$$

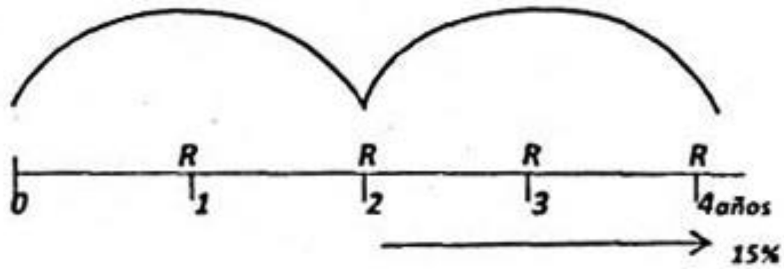
$$10\,\cancel{\text{años}} \times \frac{2 \text{ meses}}{1\,\cancel{\text{año}}}$$

Respuesta: El Sr Montero tendrá como importe final de sus ahorros 10.759,156.

Ejemplo 4: Usted deposita cada fin de mes 400 quetzales, durante 4 años en una cuenta de ahorros que abona el 12% de interés capitalizable mensualmente. Halle el importe que tendrá en su cuenta sabiendo que el segundo año el interés incrementa al 15% capitalizable mensualmente.

Datos

R = 400
n = 2 años x 12 = 24
i = 12 % cap.men.→0,12/12 = 0,01
i = 15% cap. men.→0,15/12 = 0,0125
S =?



Solución

(a interés compuesto el tiempo que falta)

$$S = R\,\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$S_1 = 400\,\frac{(1+0{,}01)^{24} - 1}{0{,}01}$$

$$S_1 = 10.789{,}39$$

$$Cn = Co\,(1+i)^n$$

$$S_1 = 10.789{,}39\,(1+0{,}0125)^{24}$$

$$S_1 = 10789{,}38(1{,}34735105)$$

$$S_1 = 14537{,}08$$

$$S = R\,\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$S_2 = 400\,\frac{(1+0{,}0125)^{24} - 1}{0{,}0125} = 11.115{,}23$$

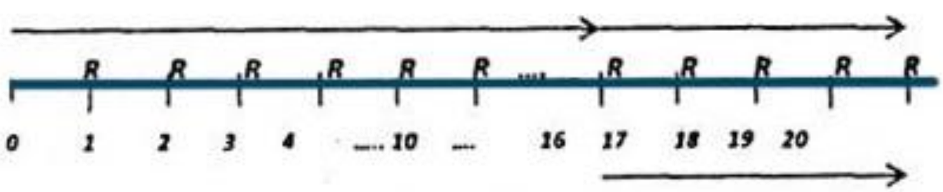
$$S_{total} = S_1 + S_2 = 14.537{,}08 + 11.115{,}23 = 25.652{,}31$$

Respuesta: El importe que se tendrá a fin del 2º año será de 25.652,31.

Ejemplo 5: El Sr. Valderrama desea comprar una casa para tal efecto realiza depósitos semestrales de 20. 000 quetzales, durante 10 años en un banco que paga el 15% capitalizable semestralmente. Hallar el importe que tendrá al cabo de 10 años; si en los 2 últimos años la tasa de interés se incrementa al 18% capitalizable semestralmente. (Redondear el resultado final al entero positivo inmediato).

Datos

R = 20. 000
n =10 años x 2=20
i = 15 % cap. sem.→0,15/2 =0,075
I = 18% cap.sem→ 0,18/ 2 = 0,09
S = ?



Solución:

$$S = R\,\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$S_1 = 20.000\,\frac{(1+0{,}075)^{16} - 1}{0{,}075}$$

$$S_1 = 20.000 \times 29{,}07724206$$
$$S_1 = 581.544{,}8411$$

Proyectamos por el tiempo que falta a Ic

$$Sn = Co(1+i)^n$$

$$Sn = 581.544{,}8411\,(1+0{,}09)^4$$

$$S_2 = 820.898{,}0031$$

$$S = R\,\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

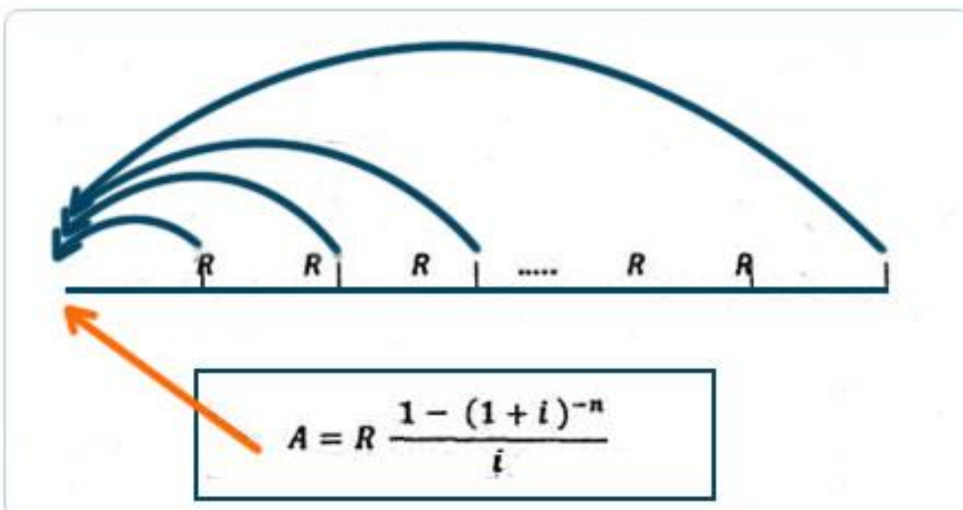
$$S = 20.000\,\frac{(1+0{,}09)^4 - 1}{0{,}09}$$

$$S_3 = 91.462{,}58$$

(Primero por 8 años a 15%. Luego proyectamos por lo que le falta a interés compuesto a 18%, porque no es anualidad. Luego se calcula por el tiempo que falta al 18% por el tiempo que falta. Al final se suman los resultados del tiempo completo.). Respuesta: Los depósitos semestrales del Sr. Valderrama al cabo de los 10 años será se convertirán en un total de: S2+S3 = S total = 820.898,0031 + 91.462,58 = 912.360,58 = 912.361

VALOR ACTUAL DE UNA ANUALIDAD VENCIDA

Son las cuotas o pagos periódicos que se realizan al final del periodo, que generan intereses compuestos por los periodos finales hasta la fecha final.

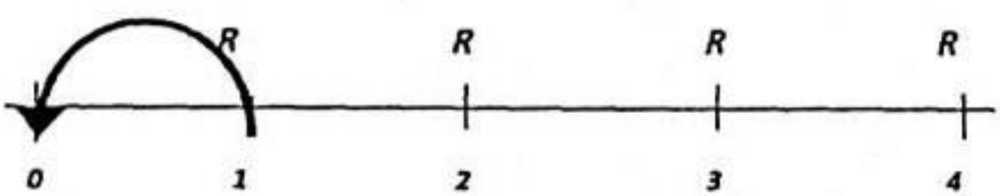


Ejemplo 6: Si usted quiere depositar hoy en un banco que paga el 4% mensual de interés el dinero suficiente para cumplir con el pago de 4 meses de alquiler razón 500 quetzales mensuales.

¿Cuánto tendría que depositar?

Datos

R =500
n = 4 meses
i = 4 % mensual
A= ?



Solucion:

1° FORMA: $Co = Cn\,(1+i)^{-n}$

1° Depósito= 500 (1 + 0,04) -1 = 480,77

2°Depósito = 500 (1 +0,04) - 2 = 462,28

3° Depósito = 500 (1 + 0,04)-3 = 444,50

4°Depósito = 500 (1 + 0,04)– 4 = 427,40

Co = 1814,95 B:

CUADRO DE INTERPRETACION

PERIODO	RENTA	INTERES	DISMINUCION DEL VALOR	SALDO
0	500		- - -	1814,95
1	500	72,50	427,40	1387,55
2	500	55,50	444,5	943,05
3	500	37,72	462,28	480,77
4	500	19,23	480,77	0
	2000	185,05	1814,95	

Mediante fórmula:

$$A = R\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 500\,\frac{1-(1+0{,}04)^{-4}}{0{,}04}$$

$$A = 500\,\frac{1-(0{,}145195809)}{0{,}04} = 1814{,}95$$

Respuesta: Debe depositar el valor de 1814,95 para recibir durante meses el valor de 500.

Ejemplo 7: Se deposita 800 a final de cada mes durante 5 años en un banco que abona el 18% capitalizare mensualmente. Hallar el valor presente de la anualidad.

Datos

R = 800

n = 5 añosx 12 = 60 m

i = 18% cap.men→0,18/12 = 0,015

A = ?

$$A = R\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$A = 800\,\frac{1-(1+0{,}015)^{-60}}{0{,}015} = 31.504{,}22$$

Respuesta: El valor presente de la anualidad será de 31.504,22 a un interés del 18% capitalizable mensualmente.

Ejemplo 8: La empresa "Importadora ABC" vende al crédito una lavadora con una cuota inicial de 1000 quetzales, y 12 cuotas mensuales de 700 quetzales con un interés del 12% capitalizable mensualmente. Hallar el precio al contado.

Datos:

Cuota Inicial= 1000
R =700
n = 12 meses
i = 12% cap.men
A = ?

$$A = R\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 700\,\frac{1-(1+0{,}12/12)^{-12}}{0{,}12/12}$$

$$A = 700\,\frac{1-(0{,}887449225)}{0{,}01} = 7878{,}55 + 1000$$

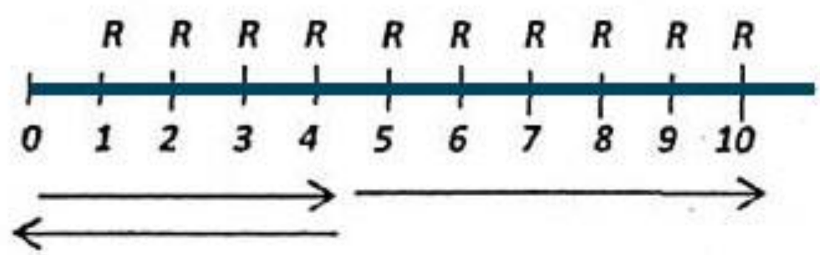
$$A = 8878{,}55$$

Respuesta: El precio al contado en el que se obtendrá el bien será de 8878,55.

Ejemplo 9: Usted adquiere mercaderías al crédito que serán pagadas mediante 4 cuotas mensuales de 1.200 quetzales, seguido de 6 cuotas mensuales de 1 000 quetzales. Hallar el valor al contado de la mercadería si la tasa de interés es del 2% mensual.

Datos

R =1 200
n = 4 meses
i = 2 % mensual
A =



Solución

$$A = R\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 1\,200\,\frac{1-(1+0{,}02)^{-4}}{0{,}02}$$

$$A = 1\,200\,\frac{1-(0{,}923845426)}{0{,}02} = 4.569{,}27$$

Datos

R =1.000
n = 6 meses
i = 2% mensual
A = ?

Solución

$$A = R\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$A = 1\,000\,\frac{1-(1+0{,}02)^{-6}}{0{,}02}$$

$$A = 1\,200\,\frac{1-(0{,}887971382)}{0{,}02}$$

$$A = 5601{,}43$$

$$A = S\,(1+i)^{-n}$$

$$A = 5601{,}43\,(1+0{,}02)^{-4}$$

$$A = 5601{,}43\,(0{,}923845426)$$

$$A = 5174{,}86$$

Valor al contado = 4569, 27 + 5174, 86 = 9744,13

Respuesta: El valor al contado de la mercadería al 2% mensual será de 9744, 13.

CALCULO DE LA RENTA DE UNA ANUALIDAD VENCIDA

Valor actual	Valor final
$A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$	$S = R\frac{(1+i)^{n}-1}{i}$
$A \cdot i = R\,[1-(1+i)^{-n}]$	$S \cdot i = R(1+i)^{n}-1$
$\boxed{R = \frac{Axi}{1-(1+i)^{-n}}}$	$\boxed{R = \frac{Sxi}{(1+i)^{n}-1}}$

Ejemplo 10: ¿Cuál será la cuota constante para pagar por un préstamo bancario de 8.000 quetzales, reembolsables en 4 cuotas cada fin de mes? Si el Banco cobra una tasa del 36% capitalizare mensualmente.

Datos

A =80.000

n = 4 meses

i = 36% cap.men→0,36/12 = 0,03

R = ?

Solución

$$R = \frac{Axi}{1-(1+i)^{-n}}$$

$$R = \frac{80.000 \times 0{,}03}{1-(1+0{,}03)^{-4}}$$

$$R = \frac{240}{0{,}1115129...}$$

$$R = 2152{,}216 \approx 2.152{,}22$$

Respuesta: La cuota constante a pagar es 2.152,22

Ejemplo 11: Halle los depósitos mensuales necesarios en una cuenta de ahorros que paga el 24% capitalizable mensualmente, para obtener en 1 año un capital de 15.000 (Redondear el resultado al entero)

Datos

S =15.000

n = 1 añox 12 = 12m

i = 24% cap. men.→0,24/12 = 0,02

R = ?

$$R = \frac{Sxi}{(1+i)^{n}-1}$$

$$R = \frac{15.000 \times 0{,}02}{(1+0{,}02)^{12}-1}$$

$$R = \frac{300}{0{,}2682417946}$$

$$R = 1118{,}39 \approx 1.118$$

$$1\ \cancel{año} \times \frac{12\ meses}{1\ \cancel{año}}$$

Respuesta: Los depósitos mensuales de cada mes serán 1.118

CALCULO DEL TIEMPO DE UNA ANUALIDAD VENCIDA

$\frac{A \cdot i}{R} = 1-(1+i)^{-n}$	$\frac{S \cdot i}{R} = (1+i)^{n}-1$
$\frac{A \cdot i}{R} - 1 = -(1-i)^{-n}$	$\frac{S \cdot i}{R} + 1 = (1+i)^{n}$

$$\frac{A \cdot i}{R} - 1 = -(1-i)^{-n}$$

$$\frac{A \cdot i - R}{R} = -(1+i)^{-n} //(-1)$$

$$\frac{R - A \cdot i}{R} = (1+i)^{-n} \ /Log$$

$$Log\,(R - A \cdot i) - Log\,R = -n\,Log\,(1+i)$$

$$\frac{Log\,(R - A \cdot i) - Log\,R}{Log\,(1+i)} = -n \quad //(-1)$$

$$\boxed{n = \frac{Log\,R - Log\,(R - A \cdot i)}{Log\,(1+i)}}$$

$$\frac{S \cdot i}{R} + 1 = (1+i)^{n}$$

$$\frac{S \cdot i + R}{R} = (1+i)^{n} \ /Log$$

$$Log(S \cdot i + R) - Log R = nLog(1+i)$$

$$\boxed{n = \frac{Log\,(S \cdot i + R) - Log\,R}{Log\,(1+i)}}$$

Ejemplo 12: Cuantos pagos semestrales de 800 quetzales se deben hacer para cancelar una deuda de 4.200 quetzales, al 8% capitalizable semestralmente (redondear al número entero superior).

Datos

A =4 200

R= 800

i = 8% cap. sem.→0,08/2 = 0,02

$$n = \frac{Log\,R - Log\,(R - A \cdot i)}{Log\,(1+i)}$$

$$n = \frac{Log\,800 - Log\,(800 - 4.200 \times 0{,}02)}{Log\,(1 + 0{,}02)}$$

$$n = \frac{Log\,800 - Log\,632}{Log\,1{,}04}$$

n= 6 semestres

Respuesta: Se deberá realizar el pago de 800 durante 6 semestres.

Ejemplo 13: Si el Sr. Pérez desea acumular 22.900 quetzales, para reunir dicha cantidad decide hacer depósito de trimestrales vencidos en un fondo de inversiones que rinde el 32% anual convertible trimestralmente. Si paga cada trimestre 500 (redondear al inmediato superior entero).

Datos

S = 22.900

R= 500

i = 32% cap. trim.

n = ?

$$n = \frac{Log\,(S \cdot i + R) - Log\,R}{Log\,(1+i)}$$

$$n = \frac{\log\,(22\,900 \times 0{,}32/4 + 500) - \log 500}{\log\,(1 + 0{,}32/4)}$$

$$n = \frac{\log 2332 - \log 500}{\log\,(1{,}08)}$$

n = 20 trimestres

Respuesta: El Sr. Pérez acumulara 22.900 con un interés del 32% anual convertible trimestralmente en 20 trimestres.

Ejemplo 14: ¿Cuántos depósitos de fin de mes de 500 quetzales serán necesarios ahorrar, para acumular un monto de 5.474,86 quetzales en un Banco que paga una tasa de 24% capitalizable mensualmente?

Datos

S = 25.474,86
R= 500
i = 24% cap. men.→0,24/12= 0,02
n = ?

$$n = \frac{Log\,(S \cdot i + R) - Log\,R}{Log\,(1+i)}$$

$$n = \frac{\log(5.474,86 \times 0,02 + 500) - \log 500}{\log(1 + 0,02)}$$

$$n = \frac{\log 609,4972 - \log 500}{\log(1,02)}$$

$$n = 9,99999 \approx 10$$

Respuesta: Se debe hacer 10 depósitos

Ejemplo 15: ¿Con cuántas cuotas constantes trimestrales vencidas de 500 se podrá amortizar un préstamo de 5.000 por el cual se paga una tasa de 6,120% trimestral?

Datos

A = 5.000
R= 500
i = 6,1208% trimestral
n = ?

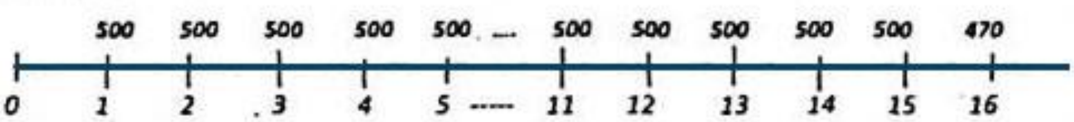
$$n = \frac{Log\,R - Log\,(R - A \cdot i)}{Log\,(1+i)}$$

$$n = \frac{Log\,500 - Log\,(500 - 5.000 \times 0,06108)}{\log(1 + 0,02)}$$

$$n = \frac{Log\,500 - Log\,193,96}{Log\,1,061208} = 15,939$$

15,93990757x 500 = 7969,953785
Menos: 15 x 500 = 7.500
Cuota adicional = 469,95 ≈ 470

La gráfica será:



Respuesta: Con 15 cuotas trimestrales más una adicional de 470,00.

Ejemplo 16: Con el objeto de retirar 800 quetzales cada 30 días una persona deposita 10.000 quetzales, en un banco ganando una tasa del 2%. Mensuales. ¿Cuántos retiros podrá efectuar?

Datos

A = 10.000
R= 800
i = 2% men
n = ?
n= 2,903089987 - 2,77815125

$$n = \frac{Log\,R - Log\,(R - A \cdot i)}{Log\,(1+i)}$$

$$n = \frac{Log\,800 - Log\,(800 - 10.000 \times 0,02)}{\log(1 + 0,02)}$$

$$n = \frac{2,903089987 - 2,77815125}{0,00860017176} \quad n = 15$$

Respuesta: Se podrá efectuar 15 retiros cada mes.

CÁLCULO DE LA TASA DE INTERÉS EN UNA ANUALIDAD VENCIDA

Como es difícil el despeje de la variable de la tasa de interés entonces utilizaremos el método del tanteo para poder aproximar el resultado que corresponde, haciendo un tanteo del porcentaje más próximo al valor del cociente.

Valor actual

$$A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$\boxed{\frac{A}{R} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

Valor final

$$S = R\frac{(1+i)^{n}-1}{i}$$

$$\boxed{\frac{S}{R} = \frac{(1+i)^{n}-1}{i}}$$

Ejemplo 17: Usted debe pagar hoy 4 000 quetzales. Como no cuenta con esa cantidad disponible acuerda con su acreedor pagar mediante 6 cuotas de 714, 10 quetzales al final de cada mes que tasa de interés se aplica en esta operación.

Datos

A = 4 000
R= 714, 10
n = 6 meses
i = ?

Solución

$$\frac{A}{R} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$\frac{4.000}{714,10} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$5,601456379 = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

CUADRO DE TANTEO

i	3%	2,5%	2%
$\frac{1-(1-i)^{-n}}{i}$	$\frac{1-(1+0,03)^{-6}}{0,030} = 5,42$	$\frac{1-(1+0,025)^{-6}}{0,0025} = 5,95$	$\frac{1-(1+0,02)^{-6}}{0,02} = 5,601$

Respuesta: La tasa de interés que más se acerca es del 2% mensual

Ejemplo 18: Usted deposita cada fin de mes en una cuenta de ahorro la suma de 1 000 quetzales durante 2 ½ años al final de este tiempo retira la suma total de 3S 500 quetzales. Cuál es la tasa de operación mensual.

Datos

S = 38 500
R= 1.000
n = 2 ½ años = 30m
i = ?

Solución

$$\frac{S}{R} = \frac{(1+i)^{n}-1}{i}$$

$$\frac{38.500}{1.000} = \frac{(1+i)^{n}-1}{i}$$

$$38,5 = \frac{(1+i)^{n}-1}{i}$$

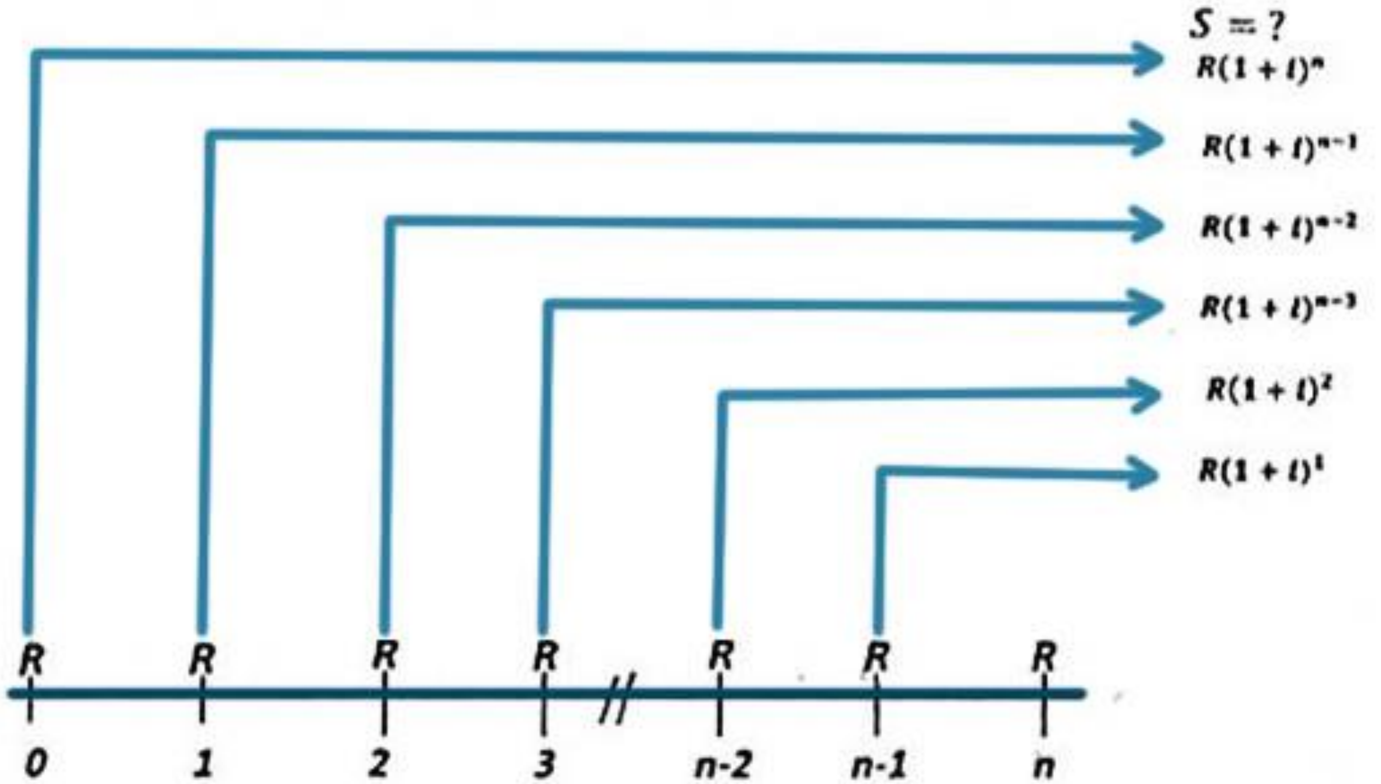
CUADRO DE TANTEO

i	2%	1%	1,67%
$\frac{1-(1-i)^{-n}}{i}$	$\frac{(1+0,02)^{-30}-1}{0,02} = 40,568$	$\frac{(1+0,01)^{-30}-1}{0,01} = 34,7848$	$\frac{(1+0,0167)^{-30}-1}{0,0167} = 38,53$

Respuesta: La tasa de interés que más se acerca es del 1,67% mensual.

ANUALIDADES ANTICIPADAS

Es otra de las anualidades más usuales las anticipadas que son las cuotas o pagos periódicos cada principio de periodo como son los alquileres que se paga al inicio de cada mes y otros dependiendo del contrato entre partes.



VALOR FINAL DE UNA ANUALIDAD ANTICIPADA

Estableciendo una ecuación financiera tomando como fecha focal el final del horizonte temporal, el monto S de una anualidad anticipada puede obtenerse del modo siguiente.

Cada pago ***R*** está sometido a interés compuesto por n números de periodos, el primero ubicado en el momento cero durante n periodos, el segundo durante ***n-1*** periodos, el penúltimo durante dos periodos y el último durante un periodo (hasta el final del horizonte temporal) El monto total de la anualidad es igual a la suma de los montos parciales de cada renta llevado al final del horizonte temporal.

$$S = R(1+i) + R(1+i)^2 + \cdots + R(1+i)^{n-2} + R(1+i)^{n-1} + R(1+i)^n$$

S es igual a la suma de una progresión geométrica cuyo primer término es ***R (1+i)***, su razón ***r*** es ***(1+i)*** y su fórmula es:

$$S = R\ (1+i)\,\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Ejemplo 19: Un individuo deposita en su cuenta de ahorro la suma de 250 al principio de cada año. Cuanto tendrá al final de 8 años, si su Banco le reconoce una tasa de interés del 3%.

Datos

R= 250

n = 8 años

i = 3%

S = ?

Solución

$$S = R\,(1+i)\,\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$S = 250\,(1 + 0{,}03)\,\frac{(1 + 0{,}03)^8 - 1}{0{,}03}$$

S = 2.289 ,776

S ≈ 2.289,78

INTERPRETACIÓN DE LA ANUALIDAD ANTICIPADA

Periodo	Renta	Interés	Incremento del valor	Saldo
0	250	----	----	250
1	250	7,5	257,5	507,5
2	250	15,22	265,22	772,72
3	250	23,18	273,18	1045,9
4	250	31,38	281,38	1327,28
5	250	39,82	289,82	1617,1
6	250	48,51	298,51	1915,61
7	250	57,47	307,47	2223,08
8	---	66,69	66,69	2289,78 $
	2.000	289,78	2289,78	

DIFERENCIA

Anualidad vencida

Anualidad anticipada

Ejemplo 20: Una corporación reserva 10 000 al principio de cada año para crear un fondo en caso de futura expansión. Si et fondo gana el 3% ¿Cuál será el monto al término del décimo año?

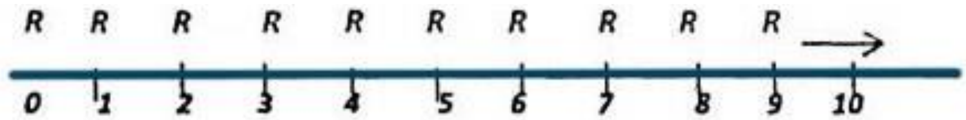
Datos

R= 10 000

n = 10 años

i = 3%

S =?



$$S = R(1+i)\frac{(1+i)^n-1}{i}$$

$$S = 10\,000\,(1+0{,}03)\,\frac{(1+0{,}03)^{10}-1}{0{,}03} = 10\,300\,\frac{(1{,}343916379)-1}{0{,}03}$$

$$S = 118077{,}96$$

Respuesta: El monto reservado por la corporación al final del décimo año será de 118.077,96

VALOR PRESENTE DE UNA ANUALIDAD ANTICIPADA

$$A = R(1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Ejemplo 21: Una compañía alquila un terreno de 4 000 quetzales mensuales ales y propone al propietario pagar el alquiler anual al principio de año con la tasa del 12% capitalízatele mensualmente. Hallar el valor presente del alquiler.

Datos

R = 4.000

i = 12% cap.men→0,12/12 = 0,01

n = 1 añox 12 = 12

A= ?

$$A = R(1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$A = 4.000\,(1+0{,}01)\,\frac{1-(1+0{,}01)^{-12}}{0{,}01}$$

$$A = 45.470{,}51$$

Respuesta: El valor presente del alquiler es 450470,51.

CUADRO DE INTERPRETACIÓN

Periodo	Renta	Interés	Disminución del valor	Total
0	----	----	----	45470,51
1	4000	----	4000	41470,51
2	4000	414,70	3585,3	37885,21

3	4000	378,85	3621,15	34264,06
4	4000	342,64	3657,36	30606,70
5	4000	306,07	3693,93	26912,77
6	4000	269,13	3730,87	23181,90
7	4000	231,82	3768,18	19413,72
8	4000	194,14	3805,86	15607,86
9	4000	156,10	3843,9	11763,96
10	4000	117,64	3882,36	7881,60
11	4000	78,80	3921,20	3960,40
12	4000	39,60	3960,40	0
	48.000	2529,49	45.470,51	

Ejemplo 22: Si usted quiere depositar hoy en un banco que paga el 4% mensual de interés, el dinero suficiente para cumplir con el pago de 4 meses de alquiler a razón de 500 quetzales, mensual. Cuanto tendría que depositar.

Datos

R = 500
i = 4%men
n = 4 meses
A= ?

$$A = R(1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$A = 500\,(1+0{,}04)\frac{1-(1+0{,}04)^{-4}}{0{,}04}$$

$$A = 1.887{,}55$$

CUADRO DE INTERPRETACIÓN

Periodo	Renta	Interés	Disminución del valor	Total
0	----	----	----	1.887,55
1	500	----	500	1.387,55
2	500	55,50	444,50	943,05
3	500	37,72	462,28	480,77
4	500	19,23	480,77	0
	2.000	112,45	1.887,55	

CALCULO DE LA RENTA EN LA ANUALIDAD ANTICIPADA

$$A = R(1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$\boxed{R = \frac{A \cdot i}{(1+i)[1-(1+i)^{-n}]}}$$

$$S = R\;(1+i)\frac{(1+i)^{n}-1}{i}$$

$$\boxed{R = \frac{S \cdot i}{(1+i)[(1+i)^{n}-1]}}$$

Ejemplo 23: Una familia necesita 4 000 quetzales, para el mes de agosto de 2012. En agosto del 2008 ellos efectúan el primero de los 4 pagos anuales iguales en un fondo de inversiones que gana el 6% de interés anual. ¿Cuál será el importe de cada depósito de manera de tener acumulados los 4 000?

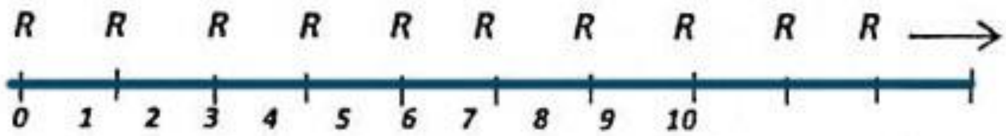
Datos

S = 4 000

n = 4 años

i = 6%

R= ?



$$R = \frac{S \cdot i}{(1+i)[(1+i)^n - 1]}$$

$$R = \frac{4000 \times 0{,}06}{(1+0{,}06)\ [(1+0{,}06)^4 - 1]} = \frac{4000 \times 0{,}06}{(1+0{,}06)\ (1{,}26247696 - 1)}$$

$$R = \frac{2\,40}{1{,}06 \times 0{,}26247696} = 862{,}60$$

Respuesta: Se debe realizar los pagos cada principio de año de 862,61.

CÁLCULO DEL TIEMPO DE UNA ANUALIDAD ANTICIPADA

$$A = R(1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$\frac{A \cdot i}{R(1+i)} = 1 - (1+i)^{-n}$$

$$\frac{A \cdot i}{R(1+i)} - 1 = -(1+i)^{-n}$$

$$\frac{A \cdot i - R(1+i)}{R(1+i)} = -(1+i)^{-n}$$

$$\frac{R(1+i) - A \cdot i}{R(1+i)} = (1+i)^{-n}$$

$$Log[R(1+i) - A \cdot i] - LogR(1+i) = -nLog(1+i)\ /\cdot(-1)$$

$$\boxed{n = \frac{LogR(1+i) - Log[R(1+i) - A \cdot i]}{Log(1+i)}}$$

$$S = R(1+i)\frac{(1\cdot}{}$$

$$\frac{S \cdot i}{R(1+i)} = (1+i)^n -$$

$$\frac{S \cdot i}{R(1+i)} + 1 = (1+i)^n$$

$$\frac{S \cdot i + R(1+i)}{R(1+i)} = (1+i)^n$$

$$Log[S \cdot i + R(1+i)] - LogR(1+i) = nLog(1+i)$$

$$\boxed{n = \frac{Log\,[S \cdot i + R\,(1+i)] - LogR(1+i)]}{Log(1+i)}}$$

Ejemplo 24: Un empleado consigna 300 quetzales, al principio de cada mes en una cuenta de ahorros que paga el 8% convertible mensualmente ¿En cuánto tiempo logrará ahorrar 30.000 quetzales?

Datos

S = 30.000

R= 300

i = 8 % → 0,08/12 = 0,0066...

n = ?

$$n = \frac{Log\,[S \cdot i + R(1+i)] - Log\,R(1+i)]}{Log(1+i)}$$

$$n = \frac{Log\,[\,30.000 \times 0{,}0066.. + 300(1 + 0{,}0066...)] - Log\,300(1 + 0{,}0066...)}{Log\,(1 + 0{,}0066...)}$$

$$n = \frac{Log(502) - Log\,(302)}{Log\,1{,}0066...}$$

$$n = \frac{0{,}2206967742}{0{,}00288540062}$$

0,48739404 x 300= 146,21

Respuesta: 76 meses y un pago final de 146.

Ejemplo 25: Usted tiene ahorrados 100. 000 quetzales en una institución de ahorro y préstamo que paga el 6% capitalizable semestralmente. Si se retiraran 10. 000 quetzales al inicio de cada semestre ¿Qué tantos retiros se podrán efectuar? ¿Cuál sería del retiro final?

Datos

A = 100.000
R= 10.000
i = 6% cap.sem→ 0,06/2 = 0,03
n = ?

$$n = \frac{Log\,R(1+i) - Log[R(1+i) - A \cdot i]}{Log(1+i)}$$

$$n = \frac{Log\,10.000\,(1 + 0{,}03) - Log\,[10.000(1 + 0{,}03) - 100.000 \times 0{,}03}{Log\,(1 + 0{,}03)}$$

$$n = \frac{Log\,10.300 - Log\,7.300}{log1{,}03}$$

$$n = \frac{4{,}012837225 - 3{,}86332286}{0{,}0128372247}$$

$$n = 11{,}64693034$$

11,64693034x10000 = 116469,30
11x10000 = <u>110000</u>
6.469,3

Respuesta: Son 11 retiros de 10.000 y un retiro adicional de 6469.

CALCULO DE LA TASA DE INTERÉS DE UNA ANUALIDAD ANTICIPADA

Utilizaremos solamente las fórmulas correspondientes para despejar la variable de la tasa de interés, aunque lo más correcto es interpolar mediante tablas, para tener un resultado correcto, en este caso solamente nos aproximaremos al resultado.

$$A = R(1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \qquad S = R(1+i)\frac{(1+i)^{n}-1}{i}$$

$$\boxed{\frac{A}{R} = (1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}} \qquad \boxed{\frac{S}{R} = (1+i)\frac{(1+i)^{n}-1}{i}}$$

Ejemplo 26: ¿A qué tasa de interés anual con capitalización mensual, de 10 cuotas mensuales anticipadas de 400 se acumularán un monto de 4.723,12?

Datos

S = 4.723,12
R= 400
n= 10 meses
i= ?

$$\frac{S}{R} = (1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$\frac{4723{,}12}{400} = (1+i)\frac{(1+i)^{10} - 1}{i}$$

$$11{,}8078 = (1+i)\frac{(1+i)^{10} - 1}{i}$$

CUADRO DE TANTEO

i	5%
$(1+i)\dfrac{(1+i)^{10}-1}{i}$	$(1+0{,}05)\dfrac{(1+0{,}05)^{10}-1}{0{,}05} = 13{,}206$

4%	3%
$(1+0{,}04)\dfrac{(1+0{,}04)^{10}-1}{0{,}04} = 12{,}48$	$(1+0{,}03)\dfrac{(1+0{,}03)^{10}-1}{0{,}03} = 11{,}807$

Respuesta: la tasa de interés que más se aproxima al 11,8078 es del 3% mensual

Ejemplo 27: Un artefacto electrodoméstico tiene un precio de 500,00 quetzales, al contado. Al crédito se ofrece con tres cuotas mensuales adelantadas de 180,00 quetzales cada una ¿Cuál es la tasa efectiva mensual cargada en la transacción?

Datos

A =500
R= 180
n = 3 meses
i = ?

$$\frac{A}{R} = (1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \Longrightarrow \frac{500}{180} = (1+i)\frac{1-(1+i)^{-3}}{i}$$

$$2.7777778 = (1+i)\frac{1-(1+i)^{-3}}{i} \Longrightarrow 2{,}78 = (1+i)\frac{1-(1+i)^{-3}}{i}$$

CUADRO DE TANTEO

i	7,5%
$(1+i)\dfrac{1-(1+i)^{-3}}{i}$	$(1+0,075)\dfrac{1-(1+0,075)^{-3}}{0,075}$ $= 2,7955$

8,2%	8,29%
$(1+0,082)\dfrac{1-(1+0,082)^{-3}}{0,082}$ $= 2,7783$	$(1+0,0829)\dfrac{1-(1+0,0829)^{-3}}{0,0829}$ $= 2,776$

Respuesta: La tasa de interés que más se acerca a 2.778 es del 8,29%.

INFORMACIÓN (INCLUÍDA EN ESTE DOCUMENTO EDUCATIVO) TOMADA DE:

Sitios web:

1. *http://www.solocontabilidad.com/matematica-financiera/anualidades*
2. *http://www.solocontabilidad.com/anualidades/anualidades-vencidas*
3. *http://www.solocontabilidad.com/anualidades/valor-actual-de-una-anualidad-vencida*
4. *http://www.solocontabilidad.com/anualidades/calculo-de-la-renta-de-una-anualidad-vencida*
5. *http://www.solocontabilidad.com/anualidades/calculo-del-tiempo-de-una-anualidad-vencida*
6. *http://www.solocontabilidad.com/anualidades/anualidades-anticipadas*
7. *http://www.solocontabilidad.com/anualidades/calculo-de-la-tasa-de-interes-de-una-anualidad-anticipada*